MODELLI A PIU' CAUSE DI ELIMINAZIONE

- Eliminazione per una sola causa
- Eliminazione per più cause
- Probabilità relative e assolute
- Relazioni approssimate tra probabilità relative e assolute

ELIMINAZIONE PER UNA SOLA CAUSA

Consideriamo una collettività in cui è presente una sola causa di uscita indicata con μ.

Siano

T n.a. durata di permanenza di un individuo nella collettività dalla nascita, misurata in anni.

ω l'età estrema (la prima età che non può essere raggiunta in vita)

T ha determinazioni in $(0, \omega)$

Indichiamo con $G(x)$ la funzione di ripartizione di T: $G(x) = \Pr\{T \leq x\}$

Si definisce la funzione di sopravvivenza

$$S(x) = \Pr\{T > x\} = 1 - G(x)$$

Si ha

$$S(0) = 1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$$

Sia $G(x)$ derivabile: $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ è la funzione di densità.

Si definisce **intensità di eliminazione**

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\{x < T \leq x + \Delta x | T > x\}}{\Delta x}$$

Risulta

$$\mu(x) = \frac{1}{S(x)} \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{S(x)}\, g(x)$$

Poiché

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d[1 - G(x)]}{dx} = -\,g(x)$$

si ha

$$\mu(x) = -\frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} = -\frac{d\log S(x)}{dx}$$

Integrando si ottiene

$$-\int_0^x \mu(u)du = \int_0^x \frac{d\log S(u)}{du} du = \log S(x) - \log S(0) = \log S(x)$$

Risulta allora

$$S(x) = \exp(-\int_0^x \mu(u)du)$$

<u>Osservazione:</u> $\mu(x)$ deve essere tale per cui:

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0 \text{ o, equivalentemente, } \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mu(u)du = +\infty$$

Si definiscono le probabilità

${}_tq_x^{(\mu)}$ probabilità che un individuo che è nella collettività all'età x, venga eliminato dalla collettività entro l'età $x+t$

${}_tp_x^{(\mu)}$ probabilità che un individuo che è nella collettività all'età x, sia nella collettività all'età $x+t$

$${}_tq_x^{(\mu)} = \Pr\{x < T \leq x+t | T > x\}$$

$${}_tp_x^{(\mu)} = \Pr\{T > x+t | T > x\}$$

Si ottiene per la probabilità di sopravvivenza

$$ {}_t p_x^{(\mu)} = \Pr\{T > x + t | T > x\} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \exp\left(- \int_0^t \mu(x+u)du\right) $$

Per la probabilità di eliminazione si ha invece

$$ {}_t q_x^{(\mu)} = \Pr\{x < T \leq x + t | T > x\} = \frac{G(x+t)-G(x)}{S(x)} $$

Poiché $\mu(x) = \frac{1}{S(x)} g(x)$

si ha

$$ G(x+t) - G(x) = \int_x^{x+t} g(u)du = \int_x^{x+t} S(u)\mu(u)du $$

da cui si ottiene

$$ {}_t q_x^{(\mu)} = \frac{G(x+t)-G(x)}{S(x)} = \int_x^{x+t} \frac{S(u)}{S(x)} \mu(u)du = \int_0^t \frac{S(x+u)}{S(x)} \mu(x+u)du = \int_0^t {}_u p_x^{(\mu)} \mu(x+u)du $$

Determinazione delle numerosità medie di una collettività al variare del tempo

Siano

$\ell(0)$ il numero certo di individui presenti nella collettività alla nascita

$\tilde{\ell}(\mathrm{x})$ il n.a. di individui presenti nella collettività all'età x

$\mathrm{T}_{(\mathrm{r})}$ con r $= 1, 2, \ldots, \ell(0)$, il n.a. che indica la durata di appartenenza alla collettività, a partire dall'età 0, dell'individuo r-esimo della collettività

Supponiamo che gli eventi $(\mathrm{T}_{(\mathrm{r})} > \mathrm{x})$ siano equiprobabili.

Si ha

$$\tilde{\ell}(\mathrm{x}) = \sum_{r=1}^{\ell(0)} \left|\mathrm{T}_{(\mathrm{r})} > \mathrm{x}\right|$$

La speranza matematica di $\tilde{\ell}(\mathrm{x})$ esprime il numero medio di individui presenti nella collettività all'età x

$$\ell(\mathrm{x}) \ = \sum_{r=1}^{\ell(0)} \Pr\{\mathrm{T}_{(\mathrm{r})} \ > x\} = \ell(0)\ \mathrm{S}(\mathrm{x})$$

Nelle tavole di mortalità sono riportati tali numeri medi con i quali si possono calcolare le probabilità di sopravvivenza e di eliminazione.

$${}_{\mathrm{t}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{(\mu)} = \frac{\ell(\mathrm{x+t})}{\ell(\mathrm{x})} \qquad\qquad {}_{\mathrm{t}}\mathrm{q}_{\mathrm{x}}^{(\mu)} = 1 - \frac{\ell(\mathrm{x+t})}{\ell(\mathrm{x})}$$

Si ha $\quad \ell(\mathrm{x}+\mathrm{t}) = \ell(\mathrm{x})\ {}_{\mathrm{t}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{(\mu)}$

Indicato con $\mathrm{d}_{\mathrm{x}}^{(\mu)}$ il numero medio di eleminati tra le età x ed x+1 risulta

$$\mathrm{d}_{\mathrm{x}}^{(\mu)} = \ell(\mathrm{x}) - \ell(\mathrm{x}+1) = \ell(\mathrm{x})\,\frac{\ell(\mathrm{x})-\ell(\mathrm{x+t})}{\ell(\mathrm{x})} = \ell(\mathrm{x}) \quad \mathrm{q}_{\mathrm{x}}^{(\mu)}$$