ELIMINAZIONE PER PIU' CAUSE

Consideriamo una collettività di individui soggetti ad n cause di eliminazione

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ poniamo $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

a due a due incompatibili ed esaustive.

Con riferimento ad un individuo della collettività, sia

C n.a. che indica la causa di eliminazione dell'individuo dalla collettività.

Si verifica l'evento

$(C = \alpha_j)$ se l'eliminazione è dovuta alla causa α_j, $j = 1, 2, \dots, n$.

Sia

T n.a. durata di permanenza di un individuo nella collettività dalla nascita, misurata in anni.

Consideriamo quindi la coppia di n.a. (T, C)

Siano $G_j(x) = \Pr\{T \leq x, (C = \alpha_j)\}$ $\quad j = 1, 2, \dots, n$ derivabili

Si ha

$$\Pr\{T \leq x\} = \sum_{j=1}^{n} G_j(x) \qquad S(x) = \Pr\{T > x\} = 1 - \sum_{j=1}^{n} G_j(x)$$

Si definiscono le seguenti probabilità

${}_t q_x^{(\alpha_j)}$ probabilità che un individuo che è nella collettività all'età x, venga eliminato dalla collettività entro l'età $x + t$ per la causa α_j, $\quad j = 1, 2, \dots, n$

$${}_t q_x^{(\alpha_j)} = \Pr\{x < T \leq x + t, (C = \alpha_j) | T > x\}$$

${}_t q_x^{(\alpha)}$ probabilità che un individuo che è nella collettività all'età x, venga eliminato dalla collettività entro l'età $x + t$ per qualsiasi causa

$${}_t q_x^{(\alpha)} = \Pr\{x < T \leq x + t | T > x\}$$

${}_t p_x^{(\alpha)}$ probabilità che un individuo che è nella collettività all'età x, sia nella collettività all'età $x + t$

$${}_t p_x^{(\alpha)} = \Pr\{T > x + t | T > x\}$$

Si ha

$$ {}_t q_x^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} {}_t q_x^{(\alpha_j)}. $$

Inoltre

$$ {}_t q_x^{(\alpha)} = 1 - {}_t p_x^{(\alpha)} $$

Poiché $\quad {}_t p_x^{(\alpha)} = \frac{S(x+t)}{S(x)}$

si ha

$$ {}_t q_x^{(\alpha)} = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} $$

Si definiscono le **intensità di eliminazione** per la causa α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

$$a\alpha_j(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\{x < T \leq x + t, (C = \alpha_j) | T > x\}}{\Delta x}$$

Risulta

$$a\alpha_j(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G_j(x+\Delta x) - G_j(x)}{\Delta x S(x)} = \frac{1}{S(x)} \frac{dG_j(x)}{dx}$$

e quindi

$$\frac{dG_j(x)}{dx} = S(x)\ a\alpha_j(x)$$

Si definisce inoltre l'**intensità di eliminazione** per una qualunque causa

$$a\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\{x < T \leq x + \Delta x | T > x\}}{\Delta x}$$

Si ha

$$a\mu(x) = a\alpha_1(x) + a\alpha_2(x) + \ldots + a\alpha_n(x).$$

Per la probabilità di eliminazione ${}_t q_x^{(\alpha_j)}$ risulta allora

$$ {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \Pr\{x < T \leq x+t, (C = \alpha_j) \mid T > x\} = \frac{G_j(x+t) - G_j(x)}{S(x)} $$

Poiché

$$ G_j(x+t) - G_j(x) = \int_x^{x+t} \frac{dG_j(u)}{du} du = \int_x^{x+t} S(u) \ \ a\alpha_j(u)du $$

e quindi

$$ \frac{G_j(x+t)-G_j(x)}{S(x)} = \int_x^{x+t} \frac{S(u)}{S(x)} \ \ a\alpha_j(u)du $$

Risulta allora $\quad {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \frac{G_j(x+t)-G_j(x)}{S(x)}$

$$ = \int_x^{x+t} \frac{S(u)}{S(x)} \ \ a\alpha_j(u)du = \int_0^t \frac{S(x+u)}{S(x)} a\alpha_j(x+u)du = \int_0^t {}_u p_x^{(\alpha)} \ a\alpha_j(x+u)du $$

Dalla intensità di eliminazione per una qualunque causa

$$a\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\{x < T \leq x + \Delta x | T > x\}}{\Delta x}$$

si ha:

$$a\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x) - S(x + \Delta x)}{\Delta x} \frac{1}{S(x)}$$

Poiché $G_j(x)$ $,j = 1, 2, \dots, n$ sono derivabili, anche

$$S(x) = 1 - \sum_{j=1}^{n} G_j(x)$$

è derivabile

Quindi si ottiene

$$a\mu(x) = -\frac{1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} = -\frac{d\log S(x)}{dx}$$

Integrando si ottiene

$$-\int_0^x a\mu(u)du = \int_0^x \frac{d\log S(u)}{du} du = \log S(x) - \log S(0) = \log S(x)$$

Risulta allora

$$S(x) = \exp(-\int_0^x a\mu(u)du)$$

Si ottiene per la probabilità di permanenza nella collettività

$${}_t p_x^{(\alpha)} = \Pr\{T > x + t | T > x\} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \exp(-\int_0^t a\mu(x+u)du)$$

e quindi

$${}_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t {}_u p_x^{(\alpha)}\, a\alpha_j(x+u)du = \int_0^t \exp\left[-\int_0^u a\mu(x+v)dv\right] a\alpha_j(x+u)du$$

essendo $a\mu(x) = a\alpha_1(x) + a\alpha_2(x) + \ldots + a\alpha_n(x)$, assegnate le intensità di eliminazione per le singole cause, si è in grado di valutare le probabilità ${}_t p_x^{(\alpha)}$ e ${}_t q_x^{(\alpha_j)}$.

Determinazione delle numerosità medie di una collettività al variare del tempo

Siano

$\ell(0)$ il numero certo di individui presenti nella collettività alla nascita

$\tilde{\ell}(\mathrm{x})$ il n.a. di individui presenti nella collettività all'età x

Abbiamo visto che la speranza matematica di $\tilde{\ell}(\mathrm{x})$ esprime il numero medio di individui presenti nella collettività all'età x

$$\ell(\mathrm{x}) = \sum_{r=1}^{\ell(0)} \mathrm{Pr}\left\{\mathrm{T}_{(\mathrm{r})} > x\right\} = \ell(0)\,\mathrm{S}(\mathrm{x})$$

Con tali numeri medi si possono calcolare le probabilità di permanenza nella collettività e di eliminazione per una qualunque causa:

$${}_{\mathrm{t}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{(\alpha)} = \frac{\ell(\mathrm{x+t})}{\ell(\mathrm{x})} \qquad {}_{\mathrm{t}}\mathrm{q}_{\mathrm{x}}^{(\alpha)} = 1 - \frac{\ell(\mathrm{x+t})}{\ell(\mathrm{x})}$$

Si possono allora determinare i numeri medi di individui presenti nella collettività

$$\ell(x+t) = \ell(x)\ {}_t p_x^{(\alpha)}$$

Indicato con ${}_t d_x^{(\alpha_j)}$ il numero medio di eleminati tra le età x ed x+t per la causa α_j risulta:

$${}_t d_x^{(\alpha_j)} = \ell(x)\ {}_t q_x^{(\alpha_j)}$$