PROBABILITÀ RELATIVE E ASSOLUTE

Abbiamo visto che se sono assegnate le intensità di eliminazione per le singole cause

$$a\alpha_1(x),\ \ a\alpha_2(x),\ \ \ldots,\ \ a\alpha_n(x)$$

essendo $$a\mu(x) = a\alpha_1(x) + a\alpha_2(x) + \ldots + a\alpha_n(x)$$

si è in grado di valutare le probabilità di permanenza nella collettività

$$ {}_t p_x^{(\alpha)} = \Pr\{T > x + t | T > x\} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \exp\left(-\int_0^t a\mu(x+u)du\right)$$

e quelle di eliminazione per le singole cause

$$ {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t {}_u p_x^{(\alpha)}\, a\alpha_j(x+u)du = \int_0^t \exp\left[-\int_0^u a\mu(x+v)dv\right] a\alpha_j(x+u)du$$

Si pone ora il problema di come valutare concretamente, in pratica, tali probabilità.

L'idea è quella di utilizzare n modelli ad una singola causa di eliminazione, uno per ogni causa di eliminazione, e di valutare le probabilità ${}_t p_x^{(\alpha)}$ e ${}_t q_x^{(\alpha_j)}$ mediante le probabilità espresse da tali modelli. Tali probabilità sono dette probabilità assolute.

Probabilità assolute

Con riferimento alle cause di eliminazione α_j , j=1, … , n, introduciamo n modelli ad una singola causa di eliminazione assegnando le intensità di eliminazione

$$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$$

Risultano così definite le probabilità di sopravvivenza

$$_t p'^{(\alpha_j)}_x = \exp(-\int_0^t \alpha_j(x+u)du)$$

e le probabilità di eliminazione

$$_t q'^{(\alpha_j)}_x = 1 - {}_t p'^{(\alpha_j)}_x = \int_0^t {}_u p'^{(\alpha_j)}_x \alpha_j(x+u)du.$$

con $j = 1, 2, ... , n$.

Tali probabilità sono chiamate **probabilità assolute**, rispettivamente, <u>di sopravvivenza</u> e <u>di eliminazione</u>.

Le probabilità ${}_t q_x^{(\alpha_j)}$ sono allora dette **probabilità relative** (o probabilità dipendenti) di eliminazione in quanto si riferiscono ad una sola causa di eliminazione in una collettività soggetta ad n cause di eliminazione.

Osservazione.

In questo contesto anche le probabilità ${}_t p_x^{(\alpha)}$ e ${}_t q_x^{(\alpha)}$ sono dette probabilità assolute di sopravvivenza e di eliminazione in una collettività con le n cause di eliminazione $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

La relazione

$$ {}_t q_x^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} {}_t q_x^{(\alpha_j)} $$

si può leggere così: “in una collettività soggetta ad n cause di eliminazione la probabilità assoluta di eliminazione è la somma di tutte le probabilità relative di eliminazione”.

L'obiettivo è valutare le probabilità

$${}_t\, p_x^{(\alpha)} \quad \text{e} \quad {}_t\, q_x^{(\alpha_j)} \qquad j=1, \ldots , n$$

mediante le

$${}_t p'^{(\alpha_j)}_x = \exp(-\int_0^t \alpha_j(x+u)du)$$

$${}_t q'^{(\alpha_j)}_x = 1 - {}_t p'^{(\alpha_j)}_x = \int_0^t {}_u p'^{(\alpha_j)}_x \, \alpha_j(x+u)du$$

con $j=1, \ldots , n$.

Assumiamo la seguente **ipotesi**:

$$a\alpha_j(x) = \alpha_j(x) \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vale la seguente **relazione di Karup**:

$$ {}_t p_x^{(\alpha)} = \prod_{j=1}^{n} {}_t p'^{(\alpha_j)}_x $$

Infatti,

$$ {}_t p_x^{(\alpha)} = \Pr\{T > x + t | T > x\} = \exp(- \int_0^t a\mu(x+u)du) $$

$$ = \exp\left(- \int_0^t \sum_{j=1}^{n} a\alpha_j(x+u)\,du\right) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(- \int_0^t a\alpha_j(x+u)du\right) $$

$$ = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(- \int_0^t \alpha_j(x+u)du\right) = \prod_{j=1}^{n} {}_t p'^{(\alpha_j)}_x $$

Confronto tra le probabilità relative e le probabilità assolute di eliminazione.

Consideriamo la causa di eliminazione α_j .

La probabilità relativa di eliminazione è

$$q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^1 {}_u p_x^{(\alpha)} \, a\alpha_j(x+u)du$$

mentre, la probabilità assoluta di eliminazione è

$$q'^{(\alpha_j)}_x = \int_0^1 {}_u p'^{(\alpha_j)}_x \, \alpha_j(x+u)du$$

Proviamo che

$$q_x^{(\alpha_j)} \leq q'^{(\alpha_j)}_x$$

Dalla relazione di Karup

$$ {}_t p_x^{(\alpha)} = \prod_{j=1}^{n} {}_t p'^{(\alpha_j)}_x $$

risulta $\quad {}_t p_x^{(\alpha)} \leq {}_t p'^{(\alpha_j)}_x$

ed è allora

$$ {}_t p_x^{(\alpha)} a\alpha_j(x+t) \leq {}_t p'^{(\alpha_j)}_x a\alpha_j(x+t) $$

Poiché $a\alpha_j(x+t) = \alpha_j(x+t)$ integrando si ottiene

$$ q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^1 {}_u p_x^{(\alpha)}\, a\alpha_j(x+u)du \leq \int_0^1 {}_u p'^{(\alpha_j)}_x\, \alpha_j(x+u)du = q'^{(\alpha_j)}_x $$

Quindi le probabilità relative di eliminazione sono minori o uguali delle corrispondenti probabilità assolute.

RELAZIONI APPROSSIMATE TRA PROBABILITÀ RELATIVE E ASSOLUTE

Supponiamo di disporre di n modelli di sopravvivenza ad una singola causa di eliminazione uno per ciascuna delle cause di eliminazione, α_j , $j=1, \dots , n$, con intensità di eliminazione

$$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$$

Risultano così definite le probabilità assolute di sopravvivenza

$$_t p'^{(\alpha_j)}_x = \exp(-\int_0^t \alpha_j(x+u)du)$$

e le probabilità assolute di eliminazione

$$_t q'^{(\alpha_j)}_x = 1 - {}_t p'^{(\alpha_j)}_x = \int_0^t {}_u p'^{(\alpha_j)}_x \, \alpha_j(x+u)du.$$

con $j = 1, 2, \dots , n$.

<u>Obiettivo</u>: valutare le probabilità relative di eliminazione

$$_t q^{(\alpha_j)}_x = \int_0^t {}_u p^{(\underline{\alpha})}_x \, a\alpha_j(x+u)du$$

Assumiamo l'**ipotesi**:

$$a\alpha_j(x+u) = \alpha_j(x+u)\,,\quad 0 \leq u \leq 1 \qquad\qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n.$$

per cui sussiste la **relazione di Karup**:

$$ {}_t p_x^{(\underline{\alpha})} = \prod_{j=1}^{n} {}_t p'^{(\alpha_j)}_x $$

Si ha allora

$$ {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t {}_u p_x^{(\underline{\alpha})}\, \alpha_j(x+u)du $$

Notiamo che occorre valutare ${}_u p_x^{(\underline{\alpha})}$ e $\alpha_j(x+u)$ essendo $0<u<t$; si devono quindi formulare opportune ipotesi, le cosiddette ipotesi di interpolazione

Si considerano a tale fine le seguenti ipotesi:

- ipotesi di interpolazione lineare o di distribuzione uniforme
- ipotesi di interpolazione esponenziale o di intensità costante.

Ipotesi di interpolazione lineare o di distribuzione uniforme

Sotto tale ipotesi si ha

$$ {}_u q'^{(\alpha_j)}_x = u\, q'^{(\alpha_j)}_x \qquad 0 < u < 1 \qquad \text{per } j = 1, 2, \dots, n $$

ed è quindi $\frac{d}{du}\, {}_u q'^{(\alpha_j)}_x = q'^{(\alpha_j)}_x \qquad 0 < u < 1$

Riprendiamo l'espressione della probabilità relativa di eliminazione

$$ {}_t q^{(\alpha_j)}_x = \int_0^t {}_u p^{(\underline{\alpha})}_x\, \alpha_j(x+u) du = \int_0^t \prod_{h=1}^{n} {}_u p'^{(\alpha_h)}_x\, \alpha_j(x+u) du $$

Poiché

$$ {}_t q'^{(\alpha_j)}_x = \int_0^t {}_u p'^{(\alpha_j)}_x\, \alpha_j(x+u) du $$

si ha $\frac{d}{dt}\, {}_t q'^{(\alpha_j)}_x = {}_t p'^{(\alpha_j)}_x \alpha_j(x+t)$ e quindi

$$ \alpha_j(x+t) = \frac{1}{{}_t p'^{(\alpha_j)}_x} \frac{d}{dt}\, {}_t q'^{(\alpha_j)}_x $$

Sostituendo l'ultima espressione nella

$$ {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t \prod_{h=1}^{n} {}_u p'^{(\alpha_h)}_x \ \alpha_j(x+u)du $$

si ottiene

$$ {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t \prod_{h=1}^{n} {}_u p'^{(\alpha_h)}_x \ \frac{1}{{}_u p'^{(\alpha_j)}_x} \ \frac{d}{du} \ {}_u q'^{(\alpha_j)}_x du = \int_0^t \frac{d}{du} \ {}_u q'^{(\alpha_j)}_x \prod_{h \neq j} {}_u p'^{(\alpha_h)}_x \ du $$

Essendo nell'ipotesi di interpolazione lineare

$$ {}_u q'^{(\alpha_j)}_x = u \, q'^{(\alpha_j)}_x \qquad 0 < u < 1 \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n $$

e $\frac{d}{du} \ {}_u q'^{(\alpha_j)}_x = q'^{(\alpha_j)}_x \qquad 0 < u < 1$

si ha

$$ {}_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t q'^{(\alpha_j)}_x \prod_{h \neq j} \left(1 - u \, q'^{(\alpha_j)}_x\right) du $$

Esempio: consideriamo il caso n=2, cioè due sole cause di uscita.

Risulta

$$q_x^{(\alpha_1)} = \int_0^1 q'^{(\alpha_1)}_x \left(1 - u\, q'^{(\alpha_2)}_x\right) du = q'^{(\alpha_1)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(\alpha_2)}_x\right]$$

Analogamente

$$_t\, q_x^{(\alpha_2)} = q'^{(\alpha_2)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(\alpha_1)}_x\right]$$

Pertanto, disponendo di opportune tavole di eliminazione

$$\left\{q'^{(\alpha_1)}_x\right\} \qquad \left\{q'^{(\alpha_2)}_x\right\}$$

si è in grado di valutare le probabilità relative di eliminazione dalla collettività.

Esempio: consideriamo il caso n=3, cioè tre cause di uscita.

Risulta

$$q_x^{(\alpha_1)} = \int_0^1 q'^{(\alpha_1)}_x \left(1 - u\, q'^{(\alpha_2)}_x\right)\left(1 - u\, q'^{(\alpha_3)}_x\right) du$$

$$= q'^{(\alpha_1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}\left(q'^{(\alpha_2)}_x + q'^{(\alpha_3)}_x\right) + \frac{1}{3} q'^{(\alpha_2)}_x q'^{(\alpha_3)}_x\right]$$

Analogamente

$${}_t\, q_x^{(\alpha_2)} = q'^{(\alpha_2)}_x \left[1 - \frac{1}{2}\left(q'^{(\alpha_1)}_x + q'^{(\alpha_3)}_x\right) + \frac{1}{3} q'^{(\alpha_1)}_x q'^{(\alpha_3)}_x\right]$$

$${}_t\, q_x^{(\alpha_3)} = q'^{(\alpha_3)}_x \left[1 - \frac{1}{2}\left(q'^{(\alpha_1)}_x + q'^{(\alpha_2)}_x\right) + \frac{1}{3} q'^{(\alpha_1)}_x q'^{(\alpha_2)}_x\right]$$

Pertanto, disponendo di opportune tavole di eliminazione

$$\left\{q'^{(\alpha_1)}_x\right\} \qquad \left\{q'^{(\alpha_2)}_x\right\} \qquad \left\{q'^{(\alpha_3)}_x\right\}$$

si è in grado di valutare le probabilità relative di eliminazione dalla collettività.

Ipotesi di interpolazione esponenziale o di intensità di eliminazione costante

Sotto tale ipotesi si ha

$$\alpha_j(x+u) = \alpha_j(x) \qquad 0 \leq u < 1 \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n$$

Posta inoltre l'ipotesi

$$a\alpha_j(x+u) = \alpha_j(x+u) \qquad 0 \leq u < 1 \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n$$

si ha

$$a\alpha_j(x+u) = \alpha_j(x) \qquad \text{e} \qquad a\mu(x+u) = \sum_{j=1}^{n} a\alpha_j(x+u) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) \qquad 0 < u < 1$$

Risulta allora

$$_t q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t {}_u p_x^{(\underline{\alpha})}\, a\alpha_j(x+u)du = \int_0^t {}_u p_x^{(\underline{\alpha})}\, \alpha_j(x)du = \alpha_j(x) \frac{1}{\sum_{h=1}^{n} \alpha_h(x)} \int_0^t {}_u p_x^{(\underline{\alpha})}\, a\mu(x+u)du$$

$$= \frac{\alpha_j(x)}{\sum_{h=1}^{n} \alpha_h(x)}\ {}_t q_x^{(\underline{\alpha})}$$

Quindi

$$q_x^{(\alpha_j)} = \frac{\alpha_j(x)}{\sum_{h=1}^{n} \alpha_h(x)} q_x^{(\underline{\alpha})} \qquad \text{essendo} \qquad q_x^{(\underline{\alpha})} = \sum_{j=1}^{n} q_x^{(\alpha_j)}$$

Poiché

$$p'^{(\alpha_j)}_x = \exp\left(-\int_0^1 \alpha_j(x) du\right) = \exp(-\alpha_j(x)) \qquad \text{e} \qquad p_x^{(\underline{\alpha})} = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\right)$$

si ha

$$\alpha_j(x) = -\log\left(p'^{(\alpha_j)}_x \right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) = -\log\left(p_x^{(\underline{\alpha})}\right) = -\log\left(\prod_{j=1}^{n} p'^{(\alpha_j)}_x\right) = -\sum_{j=1}^{n} \log\left(p'^{(\alpha_j)}_x\right)$$

e quindi

$$q_x^{(\alpha_j)} = \frac{\log\left(p'^{(\alpha_j)}_x\right)}{\sum_{h=1}^{n} \log\left(p'^{(\alpha_h)}_x\right)} \left(1 - p_x^{(\underline{\alpha})}\right) = \frac{\log\left(p'^{(\alpha_j)}_x\right)}{\sum_{h=1}^{n} \log\left(p'^{(\alpha_h)}_x\right)} \left(1 - \prod_{h=1}^{n} p'^{(\alpha_h)}_x\right)$$

Esempio: consideriamo il caso n=2, cioè due sole cause di uscita.

Risulta

$$q_x^{(\alpha_1)} = \frac{\log(\ {p'}_x^{(\alpha_1)})}{\sum_{h=1}^{2} \log\left(\ {p'}_x^{(\alpha_h)}\right)} (1 - \ {p'}_x^{(\alpha_1)} \ {p'}_x^{(\alpha_2)})$$

$$q_x^{(\alpha_2)} = \frac{\log(\ {p'}_x^{(\alpha_2)})}{\sum_{h=1}^{2} \log\left(\ {p'}_x^{(\alpha_h)}\right)} (1 - \ {p'}_x^{(\alpha_1)} \ {p'}_x^{(\alpha_2)})$$

Pertanto, disponendo di opportune tavole di sopravvivenza

$$\left\{{p'}_x^{(\alpha_1)}\right\} \qquad \left\{{p'}_x^{(\alpha_2)}\right\}$$

si è in grado di valutare le probabilità relative di eliminazione dalla collettività.