COLLETTIVITÀ SUDDIVISA IN GRUPPI

- Probabilità di transizione fra gruppi
- Numerosità medie dei gruppi alle varie epoche

PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE FRA GRUPPI

Consideriamo una collettività di individui suddivisa in n gruppi:

- Gruppo 1
- Gruppo 2
- …
- Gruppo n

tali che

> ogni individuo della collettività appartenga ad uno ed uno solo dei gruppi e possa transitare nel tempo attraverso i gruppi secondo un meccanismo aleatorio

Siano (nb: tutte le grandezze sono numeri interi):

α l'età minima di appartenenza a ciascun gruppo

ω_i l'età minima che nessun individuo può raggiungere nel gruppo i, per $i = 1, 2, \ldots, n$

Con riferimento ad un individuo appartenente al gruppo i, siano

x l'età di ingresso nel gruppo i, con $\alpha \leq x \leq \omega_i - 1$

t l'antidurata di appartenenza al gruppo

Supponiamo che

- l'unità di misura del tempo sia l'anno
- sul sistema di riferimento temporale si rappresentino le età
- i passaggi tra i gruppi avvengano soltanto ad età intere
- ci possa essere un solo passaggio all'anno

Definiremo:

- le probabilità di passaggio da un gruppo ad un altro senza passaggi intermedi;
- le probabilità di permanenza in un gruppo

nell'ipotesi che siano le stesse per tutti gli individui nella collettività e non dipendano dal tempo.

Consideriamo un individuo entrato nel gruppo i all'età x e presente nel gruppo i all'età $x+t$

Siano:

$q^{ij}_{[x]+t}$ probabilità che l'individuo passi nel gruppo j all'età $x+t+1$

$p^{i}_{[x]+t}$ probabilità che l'individuo rimanga nel gruppo i almeno fino all'età $x+t+1$

Si ha

$$\sum_{j \neq i} q^{ij}_{[x]+t} + p^{i}_{[x]+t} = 1$$

Siano:

${}_{u}p^{i}_{[x]+t}$ probabilità che l'individuo rimanga nel gruppo i almeno fino all'età $x + t + u$

${}_{u/}q^{ij}_{[x]+t}$ probabilità che l'individuo rimanga nel gruppo i fino all'età $x + t + u$ e passi nel gruppo j all'età $x + t + u + 1$

Risulta

$${}_{u}p^{i}_{[x]+t} = \prod_{k=0}^{u-1} p^{i}_{[x]+t+k}$$

e

$${}_{u/}q^{ij}_{[x]+t} = {}_{u}p^{i}_{[x]+t} \, q^{ij}_{[x]+t+u}$$

<u>Osservazione</u>: a partire dalle $q^{ij}_{[x]+t}$ si determinano tutte le altre probabilità.

NUMEROSITÀ MEDIE DEI GRUPPI ALLE VARIE EPOCHE

Supponiamo che in una data epoca, che indichiamo con 0, sia nota la consistenza numerica dei gruppi, suddivisa per età di ingresso e antidurata.

Sia

$\ell^{i(0)}(x,t)$ il n. di individui di età $x+t$ che sono nel gruppo i all'epoca 0, con età x di ingresso nel gruppo i e antidurata t, $i = 1, 2, ... , n$.

Sono noti $\ell^{i(0)}(x,t)$, $i = 1, 2, ... , n$ per ogni possibile età x e antidurata t

Siamo interessati a studiare la composizione della collettività nei diversi gruppi, all'epoca $m>0$.

Sia

$\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)$ il n.a. di individui presenti nel gruppo i all'epoca m, con età x di ingresso nel gruppo i e antidurata t, $i = 1, 2, \dots, n$

Obiettivo: valutare i cosiddetti numeri medi di individui presenti nei vari gruppi all'epoca m

$$\ell^{i(m)}(x,t) = E\left(\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)\right) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Nelle due ipotesi di collettività chiusa a nuovi ingressi e di collettività aperta a nuovi ingressi successivi all'epoca 0.

Collettività chiusa a nuovi ingressi

Consideriamo il caso di una collettività chiusa a nuovi ingressi a partire dall'epoca 0.

Sono noti

$$\ell^{i(0)}(x,t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ per ogni possibile età } x \text{ e antidurata } t$$

Il n.a.

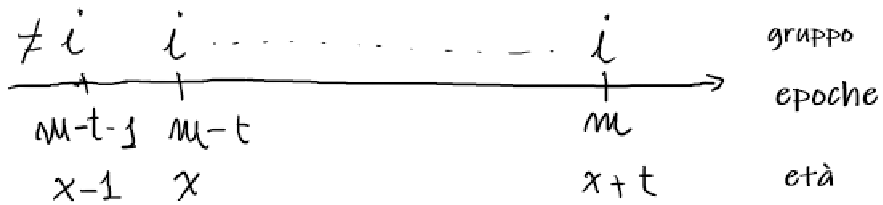
$$\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)$$

si riferisce ad individui che all'epoca m hanno età $x+t$ e che si trovano nel gruppo i da esattamente t anni, pertanto sono entrati nel gruppo i all'epoca $m-t$

Distinguiamo due casi:

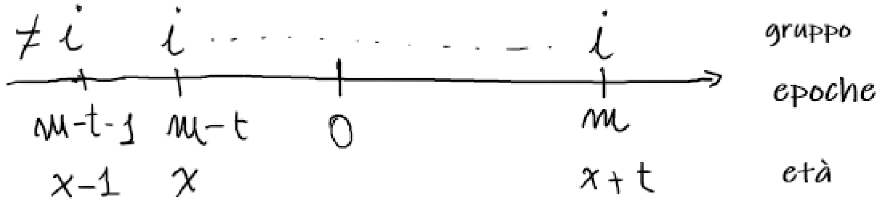
a) $m \leq t$

b) $m > t$



Numerosità medie dei gruppi alle varie epoche

Caso $m \le t$



È noto

$\ell^{i(0)}(x, t-m)$ il numero di individui presenti all'epoca 0 nel gruppo i da $t-m$ anni, dai quali provengono gli individui che all'epoca m sono nel gruppo i da t anni, essendo entrati nel gruppo i all'età x

Indicato con

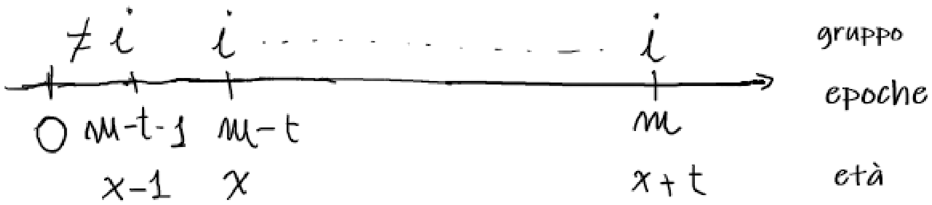
$\tilde{\ell}^{i(m)}(x, t)$ il n.a. di individui che all'epoca m sono nel gruppo i da t anni, essendo entrati nel gruppo i all'età x

Risulta

$$\ell^{i(m)}(x, t) = E\left(\tilde{\ell}^{i(m)}(x, t)\right) = \ell^{i(0)}(x, t-m)\,{}_{m}p^{i}_{[x]+t-m}$$

Numerosità medie dei gruppi alle varie epoche

Caso $m > t$



Gli individui che all'epoca m sono nel gruppo i da t anni, provengono da coloro che sono entrati nel gruppo i, con età x, all'epoca $\mathrm{m}-\mathrm{t}$.
All'epoca 0 il numero di tali individui non è noto.

Indichiamo con

$\tilde{\lambda}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}(\mathrm{m}-\mathrm{t})}$ il n.a. di individui che all'epoca $\mathrm{m}-\mathrm{t}$ entrano nel gruppo i con età x, provenendo da altro gruppo

$$\lambda_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}(\mathrm{m}-\mathrm{t})} = \mathrm{E}\left(\tilde{\lambda}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}(\mathrm{m}-\mathrm{t})}\right)$$

Il numero atteso di individui che all'epoca m sono nel gruppo i da t anni, essendo entrati nel gruppo i all'età x, è

$$\ell^{\mathrm{i}(\mathrm{m})}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mathrm{E}\left(\tilde{\ell}^{\mathrm{i}(\mathrm{m})}(\mathrm{x},\mathrm{t})\right) = \mathrm{E}\left(E\left(\tilde{\ell}^{\mathrm{i}(\mathrm{m})}(\mathrm{x},\mathrm{t})\middle|\tilde{\lambda}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}(\mathrm{m}-\mathrm{t})}\right)\right) = \lambda_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}(\mathrm{m}-\mathrm{t})}\ {}_{\mathrm{t}}\mathrm{p}_{[\mathrm{x}]}^{\mathrm{i}}$$

Per determinare

$$\lambda_x^{i(m-t)} = E\left(\tilde{\lambda}_x^{i(m-t)}\right)$$

Occorre considerare tutti i gruppi $j \neq i$ dai quali si possono avere ingressi nel gruppo i, inoltre si devono considerare tutte le possibili coppie di età di ingresso e di antidurata che determinano l'età x di ingresso nel gruppo i.

Risulta

$$\lambda_x^{i(m-t)} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{\tau=1}^{x-\alpha} \ell^{j(m-t-1)}(x-\tau, \tau-1) q_{[x-\tau]+\tau-1}^{ji}.$$

Osservazione.

Poiché stiamo considerando una collettività chiusa, il numero medio $\ell^{i(m)}(x,t)$ riguarda individui che all'epoca m hanno età x+t e che erano già presenti all'epoca 0; pertanto deve essere

$$x + t - m \geq \alpha \qquad \text{cioè} \qquad m \leq x + t - \alpha$$

Riassumendo, in una collettività chiusa a nuovi ingressi, il numero medio di individui presenti nel gruppo i all'epoca m, con età di ingresso nel gruppo x e antidurata t è dato da

$$\ell^{i(m)}(x,t) = \begin{cases} \ell^{i(0)}(x, t-m)\, {}_{m}p^{i}_{[x]+t-m} & \text{per } m \le t \\ \lambda^{i(m-t)}_{x} \;\; {}_{t}p^{i}_{[x]} & \text{per } t < m \le x+t-\alpha \end{cases}$$

con

$$\lambda^{i(m-t)}_{x} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{\tau=1}^{x-\alpha} \ell^{j(m-t-1)}(x-\tau, \tau-1)\, q^{ji}_{[x-\tau]+\tau-1}.$$

Collettività aperta a nuovi ingressi

Consideriamo il caso di una collettività aperta a nuovi ingressi successivi all'epoca 0.

Sono noti

- i numeri di individui presenti nei diversi gruppi all'epoca 0:

  $\ell^{i(0)}(x,t)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ per ogni possibile età x e antidurata t

- i numeri di nuovi ingressi nei diversi gruppi:

  $\nu_x^{i(m)}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ per ogni possibile età x e epoca m

Il numero atteso di individui nel gruppo i all'epoca m, con età di ingresso x e antidurata t, è

$$\ell^{i(m)}(x,t) = {}_{(1)}\ell^{i(m)}(x,t) + {}_{(2)}\ell^{i(m)}(x,t).$$

con

${}_{(1)}\ell^{i(m)}(x,t)$ numero medio di individui provenienti dalla collettività iniziale presente in 0

${}_{(2)}\ell^{i(m)}(x,t)$ numero medio di individui provenienti dagli ingressi successivi all'epoca 0.

Per quanto riguarda il numero medio di individui provenienti dalla collettività iniziale presente in 0, si ha

$$ {}_{(1)}\ell^{i(m)}(x,t) = \begin{cases} \ell^{i(0)}(x, t-m)\,{}_{m}p^{i}_{[x]+t-m} & \text{per } m \le t \\ \lambda_x^{i(m-t)}\;{}_{t}p^{i}_{[x]} & \text{per } t < m \le x+t-\alpha \end{cases} $$

con

$$ \lambda_x^{i(m-t)} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{\tau=1}^{x-\alpha} {}_{(1)}\ell^{j(m-t-1)}(x-\tau, \tau-1)\, q^{ji}_{[x-\tau]+\tau-1}. $$

Per quanto riguarda il numero medio di individui provenienti da individui entrati successivamente all'epoca 0, si ha

$$ {}_{(2)}\ell^{i(m)}(x,t) = \mu_x^{i(m-t)}\;{}_{t}p^{i}_{[x]} $$

dove $\mu_x^{i(m-t)}$ è il valore atteso del numero aleatorio di ingressi nel gruppo i con età x all'epoca m-t, relativi ad individui entrati nella collettività dopo l'epoca 0.

Per m=1 si ha

$$ {}_{(2)}\ell^{i(1)}(x,0) = \mu_x^{i(1)} = \nu_x^{i(1)} $$

Invece, per m>1 risulta

$$ \mu_x^{i(m)} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{\tau=1}^{\min\{m-1, x-\alpha\}} {}_{(2)}\ell^{j(m-1)}(x-\tau, \tau-1) q_{[x-\tau]+\tau-1}^{ji} + \nu_x^{i(m)}. $$

Riassumendo, in una collettività aperta a nuovi ingressi, il numero medio di individui presenti nel gruppo i all'epoca m, con età di ingresso nel gruppo x e antidurata t è dato da

$$ \ell^{i(m)}(x,t) = \begin{cases} \ell^{i(0)}(x, t-m)\,{}_m p_{[x]+t-m}^{i} & \text{per } m \leq t \\ (\lambda_x^{i(m-t)} + \mu_x^{i(m-t)})\ {}_t p_{[x]}^{i} & \text{per } t < m \leq x+t-\alpha \\ \mu_x^{i(m-t)}\ {}_t p_{[x]}^{i} & \text{per } m > x+t-\alpha \end{cases} $$