# LO SCHEMA I.V.S.

- I gruppi nello schema I.V.S.
- I dati
- I numeri medi

# I GRUPPI NELLO SCHEMA I.V.S.

Applichiamo il modello di collettività suddivisa in gruppi ad un tipico fondo pensioni in cui gli individui possono essere:

- attivi
- pensionati diretti
- pensionati indiretti
- pensionati di reversibilità

Più precisamente, nello schema di Invalidità-Vecchiaia-Superstiti (schema I.V.S.) si ha la seguente suddivisione in gruppi:

| | |
|---|---|
| - Gruppo 1: gruppo degli attivi | |
| - Gruppo 2: gruppo dei pensionati di invalidità | |
| - Gruppo 3: gruppo dei pensionati di vecchiaia | pensionati diretti |
| - Gruppo 4: gruppo dei pensionati di per altre cause | |
| - Gruppo 5: gruppo dei nuclei superstiti di attivo | pensionati indiretti |
| - Gruppo 6: gruppo dei nuclei superstiti di pensionato | pensionati di reversibilità |

Le transizioni tra i gruppi sono regolate dalle seguenti condizioni:

- al Gruppo 1 degli attivi si può accedere soltanto dall'esterno della collettività
- l'accesso ai Gruppi 2, 3, 4, 5 può avvenire soltanto dal Gruppo 1
- l'accesso al Gruppo 6 può avvenire soltanto dai gruppi 2, 3 e 4

Aggiungiamo il

- Gruppo 7: gruppo degli eliminati definitivamente

a cui si accede

- dal Gruppo 1 (decesso di attivo senza nucleo superstite)
- dai Gruppi 2, 3, 4 (decesso di pensionato senza nucleo superstite)
- dai Gruppi 5 e 6 (estinzione dei nuclei superstiti di attivo e di pensionato)

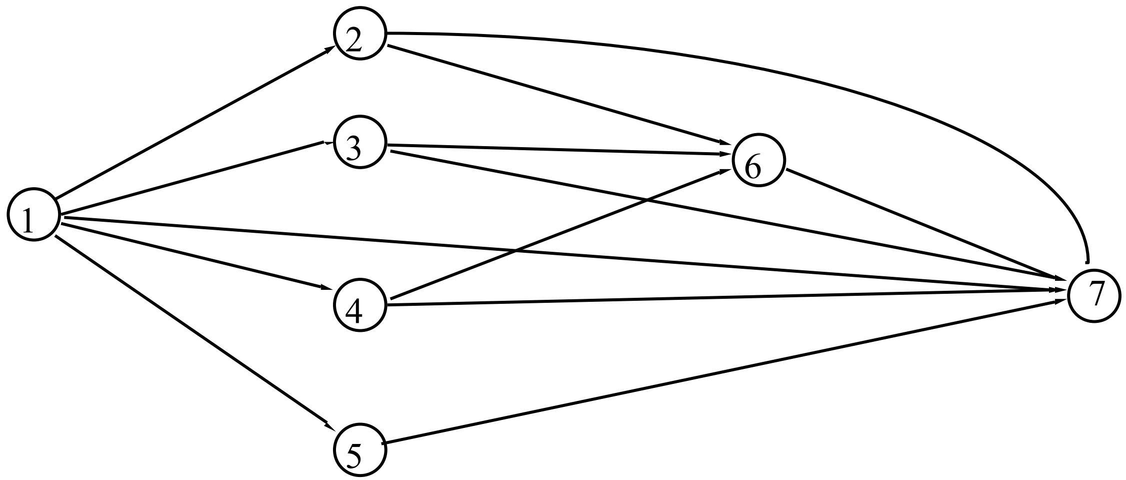
<u>Osservazione</u>:

Si può utilizzare una suddivisione più fine della collettività, per esempio:

il Gruppo 1 degli attivi può essere suddiviso per diversi livelli di carriera

il Gruppo 2 dei pensionati di invalidità può essere suddiviso per diversi gradi di invalidità

## GRAFO DELLE POSSIBILI TRANSIZIONI NELLO SCHEMA I.V.S.




*I nodi rappresentano i gruppi, gli archi le transizioni possibili*

<u>Osservazione</u>:

L'uscita dai gruppi 5 e 6 dei superstiti può avvenire non solo per morte, ma anche per il venire meno delle condizioni che danno diritto a percepire la pensione (es. coniuge che si risposa, figli che superano una determinata età, …)

Supponiamo che

- i passaggi tra i gruppi avvengano soltanto ad epoche intere (unità di misura l'anno)
- ci possa essere un solo passaggio all'anno
- ci riferiamo soltanto ad età intere.

# I DATI

Siano (nb: tutte le grandezze sono numeri interi):

- $\alpha$ l'età minima di ingresso nel Gruppo 1 degli attivi
- $\xi$ la prima età che nessun individuo può avere nel Gruppo 1 (*età di vecchiaia*)
- $x$ l'età di ingresso nel Gruppo $1$, con $\alpha \le x \le \xi - 1$
- $t$ l'anzianità di assicurazione, cioè il numero di anni di appartenenza al Gruppo 1, con $0 \le t \le \xi - x$
- $\omega_k$ la prima età che nessun individuo del Gruppo k dei pensionati, per $k = 2, 3, 4$, può raggiungere restando nel gruppo,

<u>Gruppi 5 (superstiti di attivo) e 6 (superstiti di pensionato)</u>: i nuclei superstiti siano in vita finché almeno uno dei componenti è in vita e permane il diritto a ricevere la pensione

si chiama *dante causa* l'attivo o il pensionato dal quale deriva il nucleo superstite

si assegna al nucleo superstite una età convenzionale $s + r$

con $s$ età al decesso del dante causa

$r$ n. di anni maturati dal nucleo superstite dal decesso del dante causa

Siano

$\omega_k$ la prima età che nessun gruppo superstite può raggiungere nel Gruppo k, $k = 5, 6$

$\tau$ l'anzianità di pensionamento di pensionati diretti o indiretti (Gruppi 2, 3, 4, 5)

$\eta$ l'anzianità di pensionamento di pensionati di reversibilità (Gruppo 6)

Per un pensionato, che è entrato in assicurazione all'età x ed è rimasto attivo per t anni, si ha

$$0 \leq \tau \leq \omega_k - (x + t) \quad \text{per } k = 2, 3, 4$$

Per un nucleo superstite di attivo, proveniente da un attivo entrato in assicurazione all'età x e che è rimasto attivo per t anni, si ha

$$0 \leq \tau \leq \omega_5 - (x + t)$$

Per un nucleo superstite di pensionato, proveniente da un attivo entrato in assicurazione all'età x , con t anni di anzianità di assicurazione e $\tau$ anni di anzianità di pensionamento, si ha

$$0 \leq \eta \leq \omega_6 - (x + t + \tau).$$

Nel momento in cui un individuo entra nel Gruppo 1 degli attivi all'età x, esso dà luogo ad una posizione previdenziale.

La **posizione previdenziale** è assunta come il soggetto che nel tempo transita tra i gruppi:

- si trova nel ruolo di attivo (Gruppo 1) con età:

  $$x + t \; (< \xi)$$

- si trova nel ruolo di pensionato diretto (Gruppo k, k=2,3,4) con età:

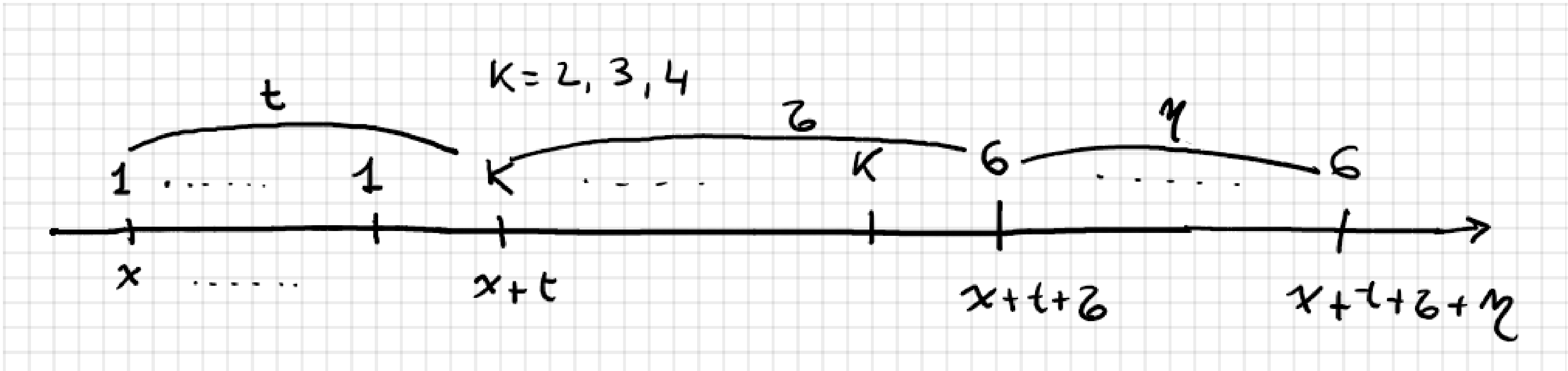
  $$x + t + \tau \; (< \omega_k)$$

- si trova nel ruolo di pensionato indiretto come nucleo superstite di attivo (Gruppo 5) con età:

  $$x + t + \tau \; (< \omega_5)$$

- si trova nel ruolo di pensionato di reversibilità come nucleo superstite di pensionato (Gruppo 6) con età:

  $$x + t + \tau + \eta \; (< \omega_6)$$




L’obiettivo è valutare in ogni epoca il numero medio di componenti di ciascun gruppo della collettività, tenendo conto dei passaggi tra i gruppi.

Definiremo:

- le probabilità di passaggio da un gruppo ad un altro senza passaggi intermedi;
- le probabilità di permanenza in un gruppo

tenendo conto separatamente dell’età di ingresso nell’ultimo gruppo e dal numero di anni di permanenza in esso (antidurata).

Abbiamo definito:

$q^{ij}_{[x]+t}$ probabilità che l'individuo nel gruppo $i$, all'età $x+t$ con antidurata $t$, passi nel gruppo $j$ all'età $x+t+1$

$p^{i}_{[x]+t}$ probabilità che l'individuo nel gruppo $i$, all'età $x+t$ con antidurata $t$, rimanga nel gruppo $i$ almeno fino all'età $x+t+1$

Nello schema I.V.S. una volta usciti dal gruppo non si può più rientrare: si parla di eliminazione dal gruppo e quindi di <u>probabilità di eliminazione</u>.

Si ha

$$\begin{cases} q^{i,1}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 1,2,3,4,5,6,7 \\ q^{ik}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 2,3,4,5,6,7, \text{ e } k = 2,3,4,5 \\ q^{i,6}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 1,5,6,7 \\ q^{i,7}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 7 \end{cases}$$

Nota: per semplicità di scrittura l'antidurata è indicata con t.

Sono diverse da 0 le seguenti probabilità di eliminazione:

$q^{1,k}_{[x]+t}$ probabilità che un attivo, entrato nel gruppo degli attivi all'età x e ivi rimasto per t anni, venga eliminato dal gruppo fra l'età $x + t$ e l'età $x + t + 1$, per invalidità ($k = 2$) o per vecchiaia ($k = 3$) o per altre cause ($k = 4$) o per morte lasciando nucleo superstite ($k = 5$) o per morte senza lasciare nucleo superstite ($k = 7$),

$q^{k,s}_{[y]+\tau}$ probabilità che un pensionato diretto del gruppo k ($k = 2,3,4$), entrato nel gruppo all'età y e ivi rimasto per $\tau$ anni, venga eliminato dal gruppo fra le età $y + \tau$ e $y + \tau + 1$, lasciando nucleo superstite, se è $s = 6$, o non lasciando nucleo superstite, se è $s = 7$,

$q^{5,7}_{[y]+\tau}$ probabilità che un nucleo superstite di attivo morto all'età y, con anzianità di pensionamento di $\tau$ anni, si estingua completamente fra le età $y + \tau$ e $y + \tau + 1$,

$q^{6,7}_{[z]+\eta}$ probabilità che un nucleo superstite di pensionato morto all'età z, con anzianità di pensionamento di $\eta$ anni, si estingua completamente fra le età $z + \eta$ e $z + \eta + 1$.

# I NUMERI MEDI

Obiettivo: determinare i numeri medi degli individui appartenenti ai diversi gruppi (1, 2, 3, 4, 5 e 6) nel tempo, tenendo conto della durata di appartenenza non solo all'ultimo gruppo, ma anche delle durate precedenti.

Indichiamo con 0 l'epoca di valutazione in cui si osserva la collettività

Si definiscono i seguenti n.a. all'epoca m, per ogni età x e per ogni antidurata $t$, $\tau$ e $\eta$ :

$\tilde{\ell}^{1(m)}(x, t)$ numero di attivi di età $x + t$ all'epoca m, con età d'ingresso nel gruppo degli attivi pari a x e antidurata t nel gruppo;

$\tilde{\ell}^{k(m)}(x, t, \tau)$ numero, all'epoca m, di pensionati di età $x + t + \tau$, del gruppo k (per k = 2, 3, 4, 5), con ingresso nel gruppo degli attivi all'età x, permanenza in quel gruppo uguale a t ($t \geq 1$) e antidurata $\tau$ nel gruppo k;

${}^{k}\,\tilde{\ell}^{6(m)}(x, t, \tau, \eta)$ numero, all'epoca m, di nuclei superstiti di pensionati del gruppo k (per k = 2, 3, 4), derivanti da individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x, rimasti in quel gruppo t anni (con $t \geq 1$), entrati nel gruppo k dei pensionati diretti all'età $x + t$, morti all'età $x + t + \tau$ ($\tau \geq 1$), nuclei superstiti che hanno antidurata $\eta$ nel gruppo 6.

Si definisce

$\tilde{\ell}^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)$ numero, all'epoca m, di nuclei superstiti di pensionati diretti, entrati nel gruppo degli attivi all'età x, rimasti in quel gruppo t anni, entrati in uno dei gruppi dei pensionati

$$\tilde{\ell}^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}\tilde{\ell}^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)$$

All'epoca 0, in cui si fanno le valutazioni, sono noti:

$\ell^{1(0)}(x,t)$ per ogni età x e per ogni antidurata $t$

$\ell^{k(0)}(x,t,\tau)$ per k=2, 3, 4, 5, per ogni età x e per ogni antidurata $t$ e $\tau$

${}^{k}\ell^{6(0)}(x,t,\tau,\eta)$ per k=2, 3, 4, per ogni età x e per ogni antidurata $t$, $\tau$ e $\eta$

Si suppone inoltre siano noti i numeri certi di nuovi ingressi nel Gruppo 1, per ogni età x e per ogni epoca $m$

$\nu_x^{1(m)}$ per ogni età x e per ogni epoca $m$

<u>Obiettivo</u>: valutare i cosiddetti numeri medi di individui presenti nei vari gruppi all'epoca m

$$\ell^{1(m)}(x,t) = E\left(\tilde{\ell}^{1(m)}(x,t)\right)$$

$$\ell^{k(m)}(x,t,\tau) = E\left(\tilde{\ell}^{k(m)}(x,t,\tau)\right)$$ per k=2, 3, 4, 5

$$^{k}\,\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = E\left(^{k}\,\tilde{\ell}^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)\right)$$ per k=2, 3, 4 e

$$\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}\,\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)$$

---

Modello per collettività aperta a nuovi ingressi successivi all'epoca 0:

$$\ell^{i(m)}(x,t) = \begin{cases} \ell^{i(0)}(x,t-m)\,{}_{m}p^{i}_{[x]+t-m} & \text{per } m \le t \\ \left(\lambda_x^{i(m-t)} + \mu_x^{i(m-t)}\right)\ {}_{t}p^{i}_{[x]} & \text{per } t < m \le x+t-\alpha \\ \mu_x^{i(m-t)}\ \ {}_{t}p^{i}_{[x]} & \text{per } m > x+t-\alpha \end{cases}$$

con

$\lambda_x^{i(m-t)}$ numero medio di ingressi da individui della collettività iniziale presente in 0

$\mu_x^{i(m-t)}$ numero medio di ingressi da individui entrati nella collettività dopo l'epoca 0

---

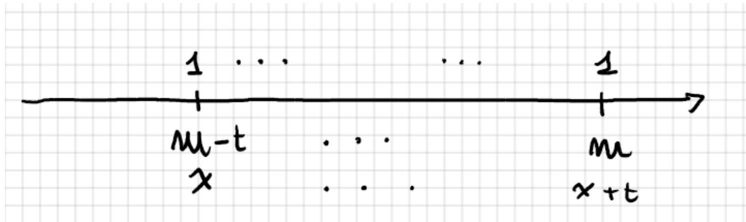
<u>Numero medio di individui presenti nel gruppo degli attivi</u>

$$\ell^{1(m)}(x,t) = E\left(\tilde{\ell}^{1(m)}(x,t)\right)$$

Gli ingressi sono possibili soltanto dall'esterno e non da altri gruppi, quindi

$$\lambda_x^{1(\dots)} = 0$$

$$\mu_x^{1(\dots)} = \nu_x^{1(\dots)}$$



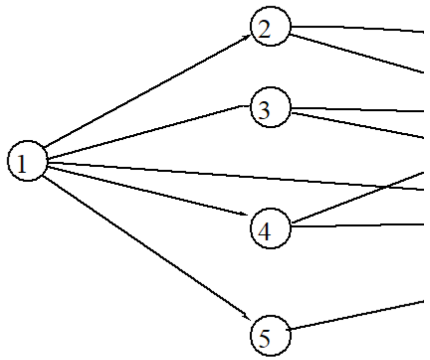

Si ha allora:

$$\ell^{1(m)}(x,t) = \begin{cases} \ell^{i(0)}(x,t-m)\,{}_m p^1_{[x]+t-m} & \text{per } m \le t \\ \nu_x^{1(m-t)}\;{}_t p^1_{[x]} & \text{per } m > t \end{cases}$$

dove

$${}_t p^1_{[x]} = \prod_{h=0}^{t-1} p^1_{[x]+h} = \prod_{h=0}^{t-1}\left(1 - \left(q^{1,2}_{[x]+h} + q^{1,3}_{[x]+h} + q^{1,4}_{[x]+h} + q^{1,5}_{[x]+h} + q^{1,7}_{[x]+h}\right)\right).$$

## Numero medio di pensionati diretti e indiretti




$$\ell^{k(m)}(x,t,\tau) = E\left(\tilde{\ell}^{k(m)}(x,t,\tau)\right) \qquad \text{per } k=2, 3, 4, 5$$

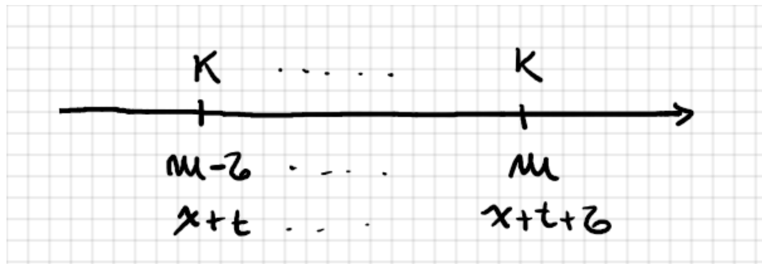
Si ottiene:

$$\ell^{k(m)}(x,t,\tau) = \begin{cases} \ell^{k(0)}(x,t,\tau-m)\,{}_{m}p^{k}_{[x+t]+\tau-m} & \text{per } m \leq \tau \\ \left(\lambda^{k(m-\tau)}_{x+t} + \mu^{k(m-\tau)}_{x+t}\right)\ {}_{\tau}p^{k}_{[x+t]} & \text{per } \tau < m \leq x+t+\tau-\alpha \\ \mu^{k(m-\tau)}_{x+t}\ \ {}_{\tau}p^{k}_{[x+t]} & \text{per } m > x+t+\tau-\alpha \end{cases}$$

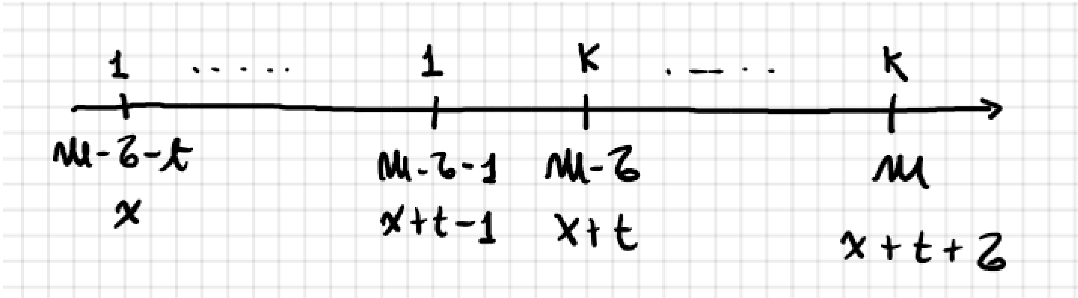
con

$\lambda^{k(m-t)}_{x+t}$ numero medio di ingressi da individui della collettività iniziale presente in 0

$\mu^{k(m-t)}_{x+t}$ numero medio di ingressi da individui entrati nella collettività dopo l'epoca 0



<u>Osservazione</u>: si può determinare il numero medio di pensionati diretti ed indiretti (per k=2, 3, 4, 5) mediante un semplice ragionamento diretto.




Si ha

$$\ell^{k(m)}(x,t,\tau) = \begin{cases} \ell^{k(0)}(x,t,\tau-m)\,{}_{m}p^{k}_{[x+t]+\tau-m} & \text{per } m \le \tau \\ \ell^{1(0)}(x,t+\tau-m)\,{}_{m-\tau-1/}q^{1,k}_{[x]+t+\tau-m}\;{}_{\tau}p^{k}_{[x+t]} & \text{per } \tau < m \le t+\tau \\ v_x^{1(m-t-\tau)}\;{}_{t-1/}q^{1,k}_{[x]}\;{}_{\tau}p^{k}_{[x+t]} & \text{per } m > t+\tau \end{cases}$$

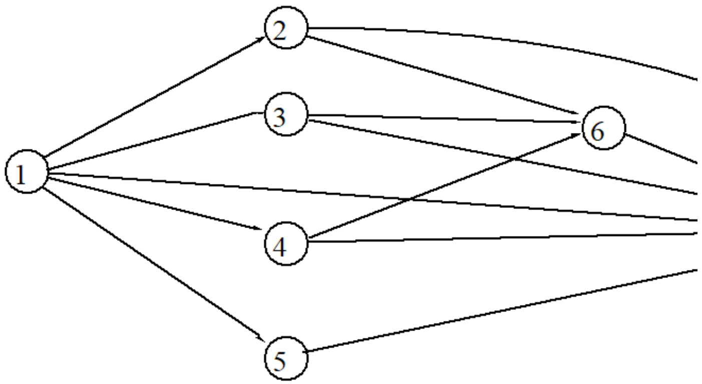
dove

$${}_{\tau}p^{k}_{[x+t]} = \prod_{h=0}^{\tau-1}\left(1-\left(q^{k,6}_{[x+t]+h}+q^{k,7}_{[x+t]+h}\right)\right) \qquad \text{per k=2, 3, 4}$$

$${}_{\tau}p^{5}_{[x+t]} = \prod_{h=0}^{\tau-1}\left(1-q^{5,7}_{[x+t]+h}\right)$$

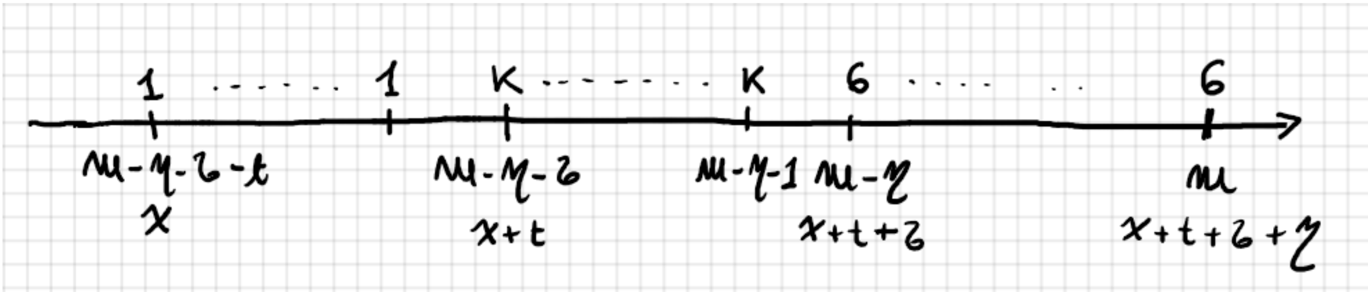
$${}_{t-1/}q^{1,k}_{[x]} = {}_{t-1}p^{1}_{[x]}\;q^{1,k}_{[x]+t-1} \qquad \text{e} \qquad {}_{m-\tau-1/}q^{1,k}_{[x]+t+\tau-m} = {}_{m-\tau-1}p^{1}_{[x]+t+\tau-m}\;q^{1,k}_{[x]+t-1}$$

Numero medio di pensionati di reversibilità




$$ {}^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = E\left( {}^{k}\tilde{\ell}^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)\right) $$

per k=2, 3, 4




Distinguiamo i seguenti casi:

$$m \leq \eta$$

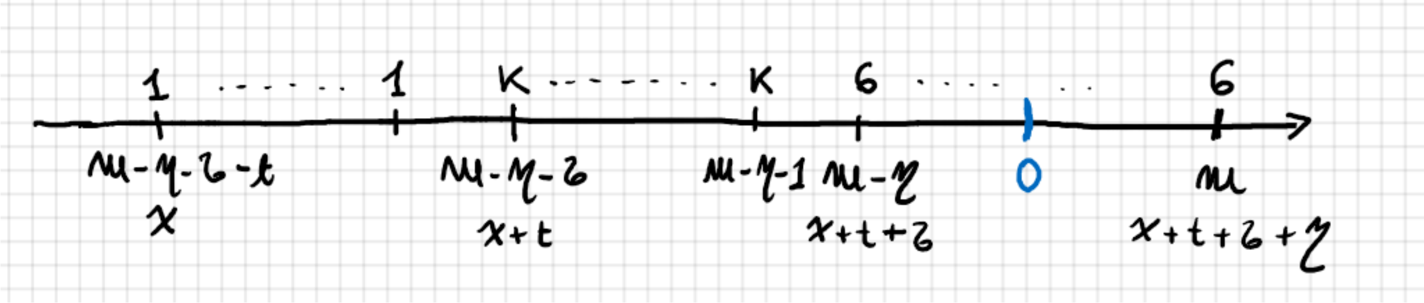
$$\eta < m \leq \tau + \eta$$

$$\tau + \eta < m \leq t + \tau + \eta$$

$$m > t + \tau + \eta$$

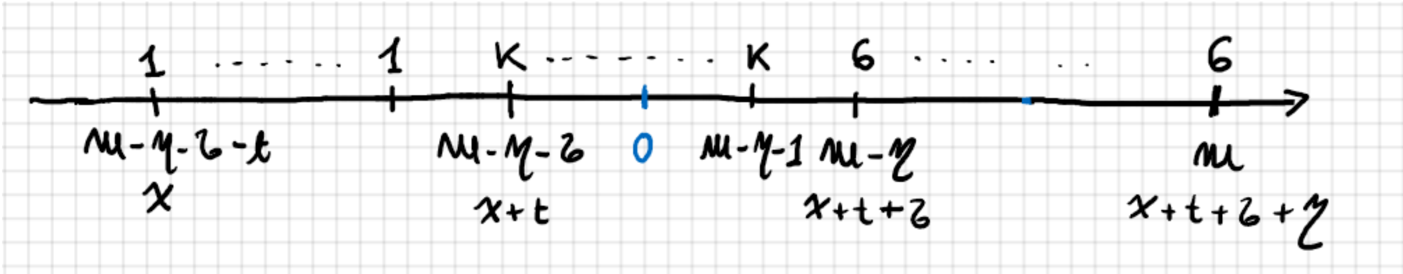
Si ottiene:

Per $m \leq \eta$



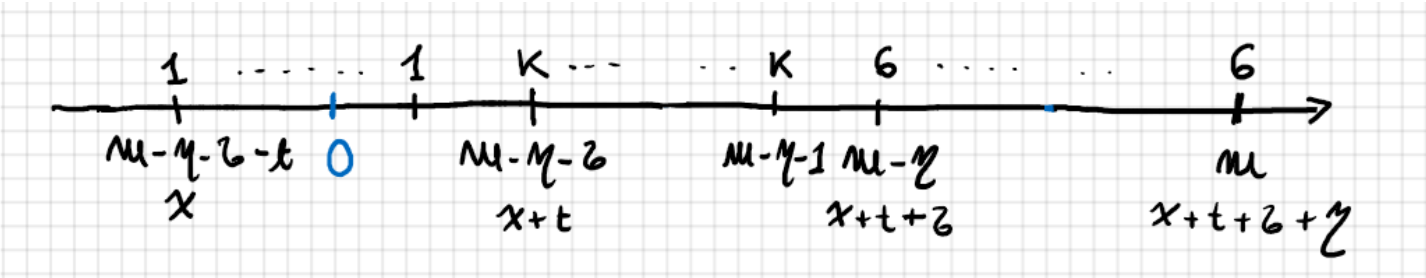

$$^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = {}^{k}\ell^{6(0)}(x,t,\tau,\eta-m)\,{}_{m}p^{6}_{[x+t+\tau]+\eta-m}$$

Per $\eta < m \leq \tau + \eta$



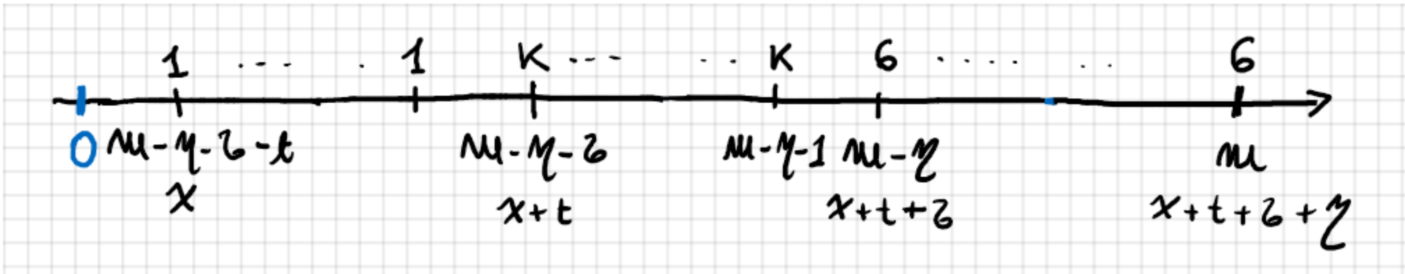

$$^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = \ell^{k(0)}(x,t,\tau+\eta-m)\,{}_{m-\eta-1/}q^{k,6}_{[x+t]+\tau+\eta-m}\;{}_{\eta}p^{6}_{[x+t+\tau]}$$

Per $\tau + \eta < m \leq t + \tau + \eta$




$$ {}^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = \ell^{1(0)}(x, t+\tau+\eta-m)\ {}_{m-\eta-\tau-1/}q^{1,k}_{[x]+t+\tau+\eta-m}\ {}_{\tau-1/}q^{k,6}_{[x+t]}\ {}_{\eta}p^{6}_{[x+t+\tau]} $$

Per $m > t + \tau + \eta$




$$ {}^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta) = \nu_x^{1(m-\eta-\tau-t)}\ {}_{t-1/}q^{1,k}_{[x]}\ {}_{\tau-1/}q^{k,6}_{[x+t]}\ {}_{\eta}p^{6}_{[x+t+\tau]} $$

Essendo

$$ {}_{\eta}p^{6}_{[x+t+\tau]} = \prod_{h=0}^{\eta-1}\left(1 - q^{6,7}_{[x+t+\tau]+h}\right). $$