CASO C:

Valore attuale medio dei salari che saranno percepiti dall'epoca m in poi dalla collettività degli attivi che entrano in assicurazione all'epoca m

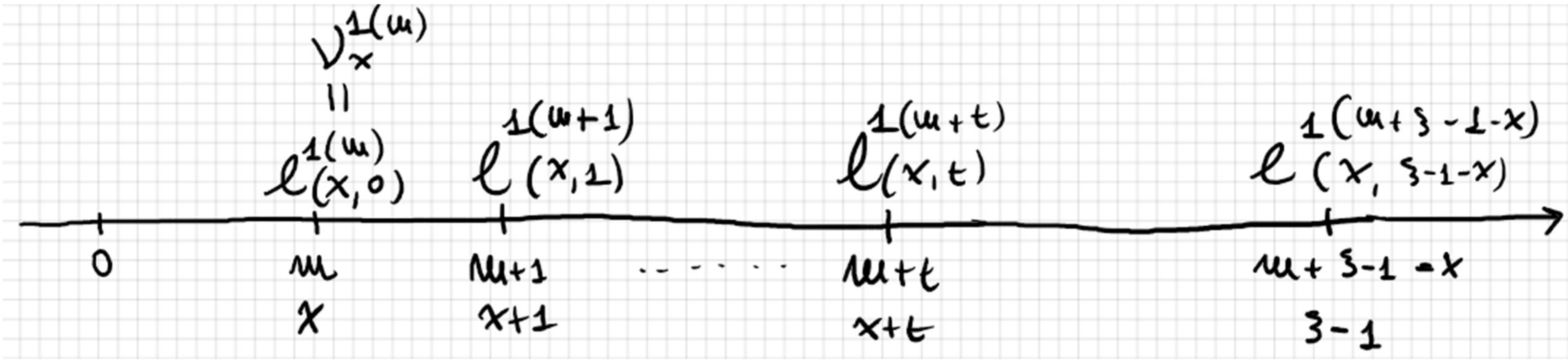
Siano

$S^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m dell'ammontare totale dei salari che gli attivi, entrati in assicurazione all'epoca m, percepiranno in tutto il periodo di attività lavorativa

$S_x^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m dell'ammontare totale dei salari che gli attivi, entrati in assicurazione all'età x all'epoca m, percepiranno in tutto il periodo di attività lavorativa

Si ha

$$S^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} S_x^{(m)}$$



Poiché $$\mathcal{S}_{x,t}^{(m+t)} = \ell^{1(m+t)}(x,t)\, s_{t+1}^{(m+t)}$$

è il valore medio dell’ammontare totale dei salari che saranno percepiti all’epoca m+t dagli attivi di età x+t, con anzianità di assicurazione t

Si ha

$$S_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \mathcal{S}_{x,t}^{(m+t)} v^t = \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \ell^{1(m+t)}(x,t)\, s_{t+1}^{(m+t)} v^t$$

Poiché

$$\ell^{1(m+t)}(x,t) = v_x^{1(m)} \;{}_t p_{[x]}^1$$

si ha

$$S_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \mathcal{S}_{x,t}^{(m+t)} v^t = v_x^{1(m)} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} {}_t p_{[x]}^1 \; s_{t+1}^{(m+t)} v^t$$

dove

$\sum_{t=0}^{\xi-1-x} {}_t p_{[x]}^1 \; s_{t+1}^{(m+t)} v^t$ è il valore attuale medio dei salari che saranno percepiti da un individuo che entra nel gruppo degli attivi all'epoca m con età x

Dati

$$\mathcal{S}_{x,0}^{(m)} \qquad \mathcal{S}_{x,1}^{(m+1)} \quad \mathcal{S}_{x,2}^{(m+2)} \quad \ldots \quad \mathcal{S}_{x,t}^{(m+t)} \quad \ldots \quad \mathcal{S}_{x,\xi-1-x}^{(m+\xi-1-x)}$$

Si ottiene

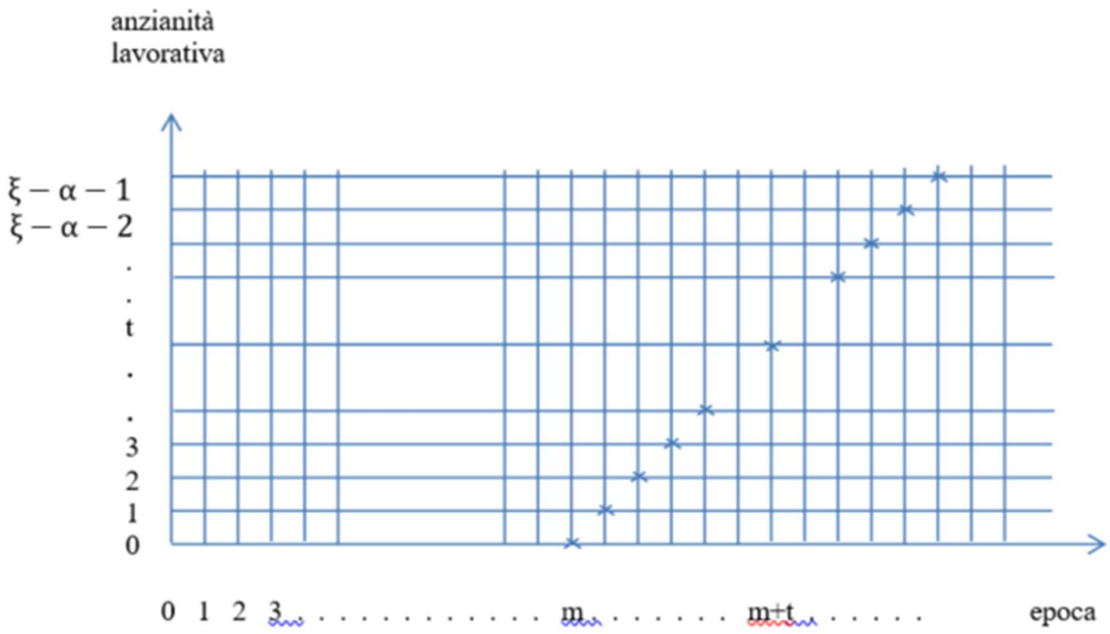
$${}_t\mathcal{S}^{(m+t)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \mathcal{S}_{x,t}^{(m+t)}$$

il valore medio dell'ammontare totale dei salari che saranno percepiti all'epoca m+t da tutti gli attivi con anzianità lavorativa t

Si ha

$$S^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha} {}_t\mathcal{S}^{(m+t)} v^t$$

Rappresentazione sul diagramma di Lexis



$$S^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha} {}_{t}\mathcal{S}^{(m+t)} v^{t}$$

Al nodo $(m+t, t)$ si associa l'importo ${}_{t}\mathcal{S}^{(m+t)}$

Valore attuale medio degli oneri pagati ai pensionati che deriveranno dalla collettività degli attivi che entrano in assicurazione all'epoca m

Siano

$O^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m dell'ammontare totale degli oneri che saranno pagati ai pensionati derivanti dagli attivi, entrati in assicurazione all'epoca m

$O_x^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m dell'ammontare totale degli oneri che saranno pagati ai pensionati derivanti dagli attivi, entrati in assicurazione all'epoca m con età x

Si ha

$$O^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} O_x^{(m)}.$$

Si distinguono gli oneri per pensioni dirette, indirette e di reversibilità.

Si ha

$$O_x^{(m)} = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}O_x^{(m)} + {}^{5}O_x^{(m)} + \sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}O_x^{(m)}$$

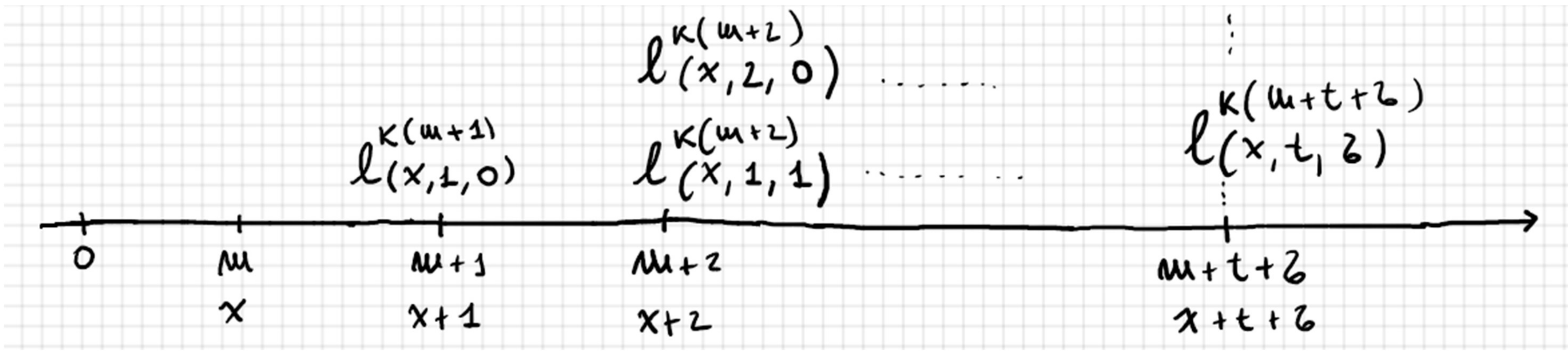
dove

${}^{k}O_x^{(m)}$ è il valore attuale medio all'epoca m degli oneri del gruppo k di pensionati (k = 2, 3, 4) derivanti dalla generazione di individui entrati in assicurazione all'età x all'epoca m

${}^{5}O_x^{(m)}$ è il valore attuale medio all'epoca m degli oneri per pensioni indirette che saranno pagate al gruppo dei pensionati indiretti derivanti dalla generazione di individui entrati in assicurazione all'età x all'epoca m

${}^{(k,6)}O_x^{(m)}$ è il valore attuale medio all'epoca m degli oneri per le pensioni che saranno pagate al gruppo dei superstiti di pensionato del gruppo k (k = 2, 3, 4) che derivano dagli attivi entrati in assicurazione all'epoca m, con età x, fino all'estinzione del gruppo

<u>Oneri per pensioni dirette:</u> ${}^{k}O_x^{(m)}$ k = 2, 3, 4



Si ha

$${}^{k}\overline{\Theta}_{x,t,\tau}^{(m+t+\tau)} = \ell^{k(m+t+\tau)}(x,t,\tau)\, r_t^{(m+t+\tau)} \qquad \text{per k = 2, 3, 4}$$

per $\quad t = 1, \dots, \xi - x \qquad \tau = 0, 1, \dots, \omega_k - 1 - (x+t)$

Quindi

$${}^{k}O_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+t)} {}^{k}\overline{\Theta}_{x,t,\tau}^{(m+t+\tau)} v^{t+\tau} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+t)} \ell^{k(m+t+\tau)}(x,t,\tau)\, r_t^{(m+t+\tau)} v^{t+\tau}$$

Poiché gli $\ell^{k(m+t+\tau)}(x,t,\tau)$ pensionati attesi provengono dai $\nu_x^{1(m)}$ attivi entrati all'epoca m, si ha

$$\ell^{k(m+t+\tau)}(x,t,\tau) = \nu_x^{1(m)}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{k}$$

e quindi

$$^{k}O_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+t)} \nu_x^{1(m)}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{k}\ r_t^{(m+t+\tau)} v^{t+\tau}$$

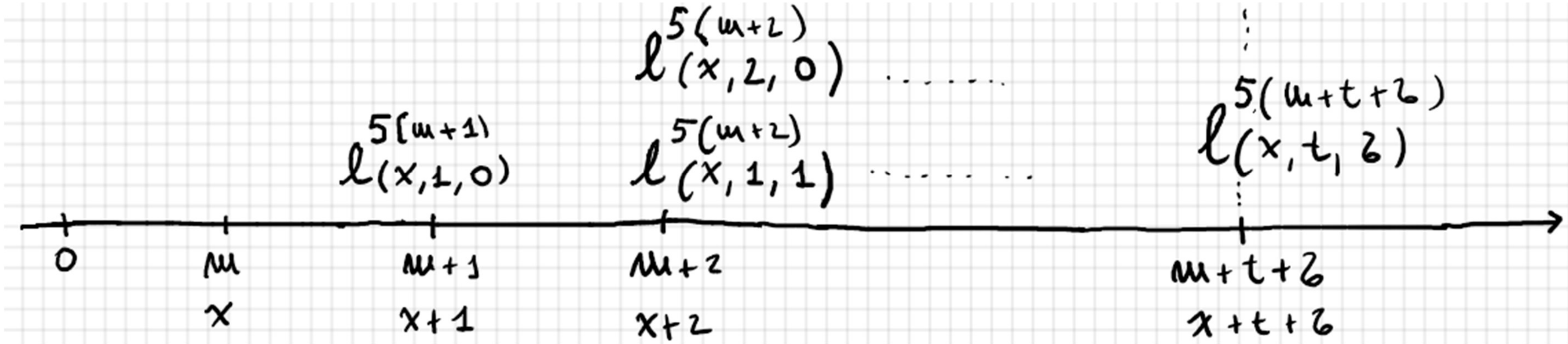
$$= \nu_x^{1(m)} \sum_{t=1}^{\xi-x}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+t)}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{k}\ r_t^{(m+t+\tau)} v^{t+\tau}$$

dove

$$\textstyle\sum_{t=1}^{\xi-x}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+t)}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{k}\ r_t^{(m+t+\tau)} v^{t+\tau}$$

è il valore attuale medio degli oneri per i pensionati del gruppo k provenienti da un attivo entrato in assicurazione all'epoca m con età x.

<u>Oneri per pensioni indirette:</u> $\quad {}^{5}\,O_x^{(m)}$



Si ha $\quad {}^{5}\,\overline{\Theta}_{x,t,\tau}^{(m+t+\tau)} = \ell^{k(m+t+\tau)}(x,t,\tau)\; r_t^{(m+t+\tau)}\psi(x+t+\tau,\tau)$

per $\quad t = 1,\ldots,\xi - x \qquad \tau = 0,1,\ldots,\omega_5 - 1 - (x+t)$

Quindi

$$
\begin{aligned}
{}^{5}\,O_x^{(m)} &= \sum_{t=1}^{\xi-x}\;\sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-(x+t)} {}^{5}\,\overline{\Theta}_{x,t,\tau}^{(m+t+\tau)}\, v^{t+\tau} \\
&= \sum_{t=1}^{\xi-x}\;\sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-(x+t)} \ell^{5(m+t+\tau)}(x,t,\tau)\; r_t^{(m+t+\tau)}\psi(x+t+\tau,\tau)\, v^{t+\tau}
\end{aligned}
$$

Poiché gli $\ell^{5(m+t+\tau)}(x,t,\tau)$ nuclei superstiti di attivo attesi provengono dai $\nu_x^{1(m)}$ attivi entrati all'epoca m, si ha

$$\ell^{5(m+t+\tau)}(x,t,\tau) = \nu_x^{1(m)}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,5}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{5}$$

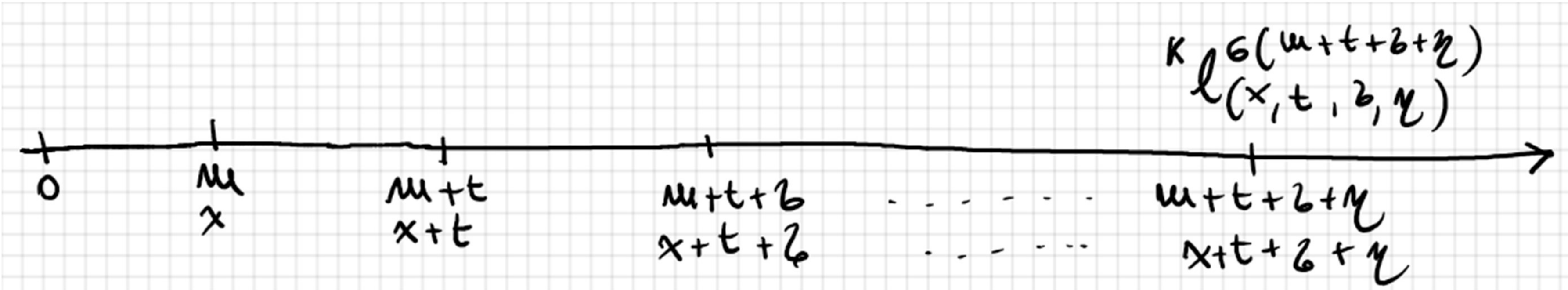
e quindi

$$\begin{aligned}{}^{5}\,O_x^{(m)} &= \sum_{t=1}^{\xi-x}\ \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-(x+t)} \nu_x^{1(m)}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,5}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{5}\ r_t^{(m+t+\tau)}\psi(x+t+\tau,\tau)v^{t+\tau} \\ &= \nu_x^{1(m)} \sum_{t=1}^{\xi-x}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,5} \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-(x+t)}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{k}\ r_t^{(m+t+\tau)}\psi(x+t+\tau,\tau)v^{t+\tau}\end{aligned}$$

dove $\sum_{t=1}^{\xi-x}\ {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,5} \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-(x+t)}\ {}_{\tau}p_{[x+t]}^{5}\ r_t^{(m+t+\tau)}\psi(x+t+\tau,\tau)\ v^{t+\tau}$

è il valore attuale medio degli oneri per i pensionati del gruppo 5 provenienti da un attivo entrato in assicurazione all'epoca m con età x.

<u>Oneri per pensioni di reversibilità:</u> $\,^{(k,6)}O_x^{(m)}$ k = 2, 3, 4



Si ha

$$\,^{(k,6)}\overline{\Theta}_{x,t,\tau,\eta}^{(m)} = \,^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)\psi(x+t+\tau+\eta,\eta)\, r_t^{(m)} \qquad \text{per } k = 2, 3, 4$$

per $\quad t = 1,\dots,\xi - x \qquad \tau = 1,\dots,\omega_k - (x+t) \qquad \eta = 0,1,\dots,\omega_6 - 1 - (x+t+\tau)$

Quindi

$$\,^{(k,6)}O_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-(x+t)} \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-(x+t+\tau)} \,^{(k,6)}\overline{\Theta}_{x,t,\tau,\eta}^{(m)}\; v^{t+\tau+\eta}$$

$$= \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-(x+t)} \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-(x+t+\tau)} \,^{k}\ell^{6(m+t+\tau+\eta)}(x,t,\tau,\eta)\, r_t^{(m+t+\tau+\eta)}\, \psi(x+t+\tau+\eta,\eta)\; v^{t+\tau+\eta}$$

Poiché gli ${}^{k}\ell^{6(m+t+\tau+\eta)}(x,t,\tau,\eta)$ nuclei superstiti di pensionato attesi provengono dai $\nu_x^{1(m)}$ attivi entrati all'epoca m, si ha

$$ {}^{k}\ell^{6(m+t+\tau+\eta)}(x,t,\tau,\eta) = \nu_x^{1(m)} \quad {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k} \quad {}_{\tau-1/}q_{[x+t]}^{k,6} \quad {}_{\eta}p_{[x+t+\tau]}^{6} $$

e quindi

$$ {}^{(k,6)}O_x^{(m)} = \nu_x^{1(m)} \sum_{t=1}^{\xi-x} {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-(x+t)} {}_{\tau-1/}q_{[x+t]}^{k,6} \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-(x+t+\tau)} {}_{\eta}p_{[x+t+\tau]}^{6} \; r_t^{(m+t+\tau+\eta)} \; \psi(x+t+\tau+\eta,\eta) \; v^{t+\tau+\eta} $$

dove

$$ \sum_{t=1}^{\xi-x} {}_{t-1/}q_{[x]}^{1,k} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-(x+t)} {}_{\tau-1/}q_{[x+t]}^{k,6} \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-(x+t+\tau)} {}_{\eta}p_{[x+t+\tau]}^{6} \; r_t^{(m+t+\tau+\eta)} \; \psi(x+t+\tau+\eta,\eta) \; v^{t+\tau+\eta} $$

è il valore attuale medio degli oneri per i nuclei superstiti di pensionati del gruppo k provenienti da un attivo entrato in assicurazione all'epoca m con età x.