

Sistemi finanziari di gestione a capitalizzazione

I contributi versati in ciascun anno saranno utilizzati in futuro e quindi vengono capitalizzati.

Tre tipi di sistemi finanziari di gestione a capitalizzazione:

- a) Premio individuale
- b) Premio per generazioni
- c) Premio medio generale

SISTEMA FINANZIARIO DEL PREMIO INDIVIDUALE

Con riferimento alla coorte di nuovi ingressi all'età x all'epoca m , nel sistema finanziario di gestione del premio individuale si ha

$$C_x^{(m)} = O_x^{(m)} \quad \forall m \quad \forall x$$

dove

$C_x^{(m)}$ è il valore attuale medio dei contributi che verranno pagati da tali assicurati

$O_x^{(m)}$ è il valore attuale medio degli oneri che deriveranno da tali assicurati

Poiché

$$C^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} C_x^{(m)} \quad \text{e} \quad O^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} O_x^{(m)}$$

si ha

$$C^{(m)} = O^{(m)} \quad \forall m$$

In tale sistema finanziario di gestione sono soddisfatte le condizioni di equilibrio attuariale:

$$(2) \quad \sum_{m=0}^{n-1} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m \quad \text{per } n \text{ generazioni di nuovi ingressi al fondo}$$

$$(2') \quad \sum_{m=0}^{\infty} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)} v^m \quad \text{per tutte le future generazioni di nuovi ingressi}$$

Con riferimento alla generazione di attivi entrati in assicurazione all'epoca m con età x , sia

$P_x^{(m)}$ il premio individuale che sarà pagato da ciascuno di essi per tutto il periodo di attività

Essedo

$S_x^{(m)}$ il valore attuale medio dei salari percepiti da ciascun assicurato di tale generazione

si ha

$$C_x^{(m)} = P_x^{(m)} S_x^{(m)}$$

Quindi

$$\begin{aligned} C_x^{(m)} = O_x^{(m)} &\Leftrightarrow P_x^{(m)} S_x^{(m)} = O_x^{(m)} \\ &\Leftrightarrow P_x^{(m)} = \frac{O_x^{(m)}}{S_x^{(m)}}. \end{aligned}$$

SISTEMA FINANZIARIO DEL PREMIO PER UNA GENERAZIONE

Con riferimento alla generazione di nuovi ingressi all'epoca m , nel sistema finanziario di gestione del premio per una generazione si ha

$$C^{(m)} = O^{(m)} \quad \forall m$$

dove

$C^{(m)}$ è il valore attuale medio dei contributi che verranno pagati da tali assicurati

$O^{(m)}$ è il valore attuale medio degli oneri che deriveranno da tali assicurati

In tale sistema finanziario di gestione sono soddisfatte le condizioni di equilibrio attuariale:

$$(2) \quad \sum_{m=0}^{n-1} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m \quad \text{per } n \text{ generazioni di nuovi ingressi al fondo}$$

$$(2') \quad \sum_{m=0}^{\infty} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)} v^m \quad \text{per tutte le future generazioni di nuovi ingressi}$$

Con riferimento alla generazione di attivi entrati in assicurazione all'epoca m , sia

$P^{(m)}$ il premio per la generazione dell'epoca m , che sarà pagato da ciascun attivo della generazione per tutto il periodo di attività

Essedo

$S^{(m)}$ il valore attuale medio dei salari percepiti da tale generazione

si ha

$$C^{(m)} = P^{(m)} S^{(m)}$$

Quindi

$$C^{(m)} = O^{(m)} \Leftrightarrow P^{(m)} S^{(m)} = O^{(m)} \Leftrightarrow P^{(m)} = \frac{O^{(m)}}{S^{(m)}}$$

Osservazione.

$$P^{(m)} = \frac{O^{(m)}}{S^{(m)}} = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} O_x^{(m)}}{\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} S_x^{(m)}} = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} P_x^{(m)} S_x^{(m)}}{\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} S_x^{(m)}} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \frac{S_x^{(m)}}{\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} S_x^{(m)}} P_x^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \left(\frac{S_x^{(m)}}{S^{(m)}} \right) P_x^{(m)}$$

Quindi, il premio per una generazione è media ponderata dei premi individuali.

SISTEMA FINANZIARIO DEL PREMIO MEDIO GENERALE

Può essere introdotto con riferimento ad un numero finito di generazioni consecutive di nuovi ingressi in assicurazione, oppure con riferimento ad un numero finito di anni di gestione, o ancora, con riferimento ad una gestione di durata illimitata.

Sia

P il premio medio generale

a) Premio medio generale per un numero finito di generazioni consecutive

Con riferimento a n generazioni di attivi che entrano alle epoche $0, 1, \dots, n-1$ si definisce P tale che

$$(2) \sum_{m=0}^{n-1} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m$$

con

$C^{(m)}$ il valore attuale medio dei contributi degli assicurati entrati in m

$O^{(m)}$ il valore attuale medio degli oneri che deriveranno da tali assicurati

Essendo

$$C^{(m)} = P S^{(m)} \quad \forall m$$

si ha

$$\sum_{m=0}^{n-1} P S^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m$$

e quindi

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)} v^m}$$

Osservazione.

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)} v^m} = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} P^{(m)} S^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)} v^m} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{S^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)} v^m} \right) P^{(m)}$$

Quindi, il premio medio generale P è media ponderata dei premi $P^{(m)}$, $m=0, 1, \dots, n-1$, relativi alle n generazioni di attivi.

b) Premio medio generale per un numero finito di anni di gestione

Con riferimento a n anni di gestione, con contributi e oneri esigibili alle epoche $0, 1, \dots, n-1$, si definisce P tale che

$$(1) \sum_{m=0}^{n-1} C_m v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O_m v^m$$

con

C_m il valore medio dei contributi esigibili all'epoca m
 O_m il valore medio degli oneri pagati all'epoca m

Essendo $C_m = P \mathcal{S}^{(m)}$ e $O_m = \bar{\theta}^{(m)} \quad \forall m$

si ha

$$\sum_{m=0}^{n-1} P \mathcal{S}^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{\theta}^{(m)} v^m$$

e quindi

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \bar{\theta}^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{S}^{(m)} v^m}$$

Osservazione.

Indicato con $\bar{\mathcal{P}}^{(m)}$ il premio di ripartizione pura, tale che $\bar{\mathcal{P}}^{(m)} \mathcal{S}^{(m)} = \bar{\theta}^{(m)}$, si ha

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \bar{\theta}^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{S}^{(m)} v^m} = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \bar{\mathcal{P}}^{(m)} \mathcal{S}^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{S}^{(m)} v^m} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{S}^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{S}^{(m)} v^m} \right) \bar{\mathcal{P}}^{(m)}$$

Quindi, il premio medio generale P è media ponderata dei premi di ripartizione pura $\bar{\mathcal{P}}^{(m)}$, $m=0, 1, \dots, n-1$.

c) Premio medio generale per una gestione di durata illimitata

Può essere interpretato sia come estensione del caso a), considerando infinite generazioni, sia del caso b), considerando infiniti anni di gestione.

Nel primo caso si definisce il premio medio generale P tale che

$$(2') \quad \sum_{m=0}^{\infty} P \mathcal{S}^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)} v^m$$

I sistemi finanziari di gestione

e quindi

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)} v^m} .$$

Nel secondo caso si definisce il premio medio generale P tale che

$$(1') \quad \sum_{m=0}^{\infty} C_m v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O_m v^m$$

e quindi

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \bar{\theta}^{(m)} v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)} v^m} .$$

I due premi coincidono se all'epoca 0 di inizio della gestione non ci sono individui che abbiano già diritto a prestazioni.