LE RISERVE

- Generalità
- Le riserve nei sistemi a capitalizzazione
- Riserva dei soprapremi
- Le riserve nel sistema di ripartizione dei capitali di copertura
- Formule ricorrenti della riserva

GENERALITÀ

Consideriamo un fondo pensioni con gestione illimitata e ci poniamo il problema della valutazione degli impegni assunti dal fondo pensione in un determinato istante.

Siano

0	l'epoca di avvio del fondo
m>0	l'epoca di valutazione
O_r	il valore medio degli oneri all'epoca r
C_r	il valore medio dei contributi all'epoca r
$v = (1+i)^{-1}$	il fattore di attualizzazione annuo

Si definisce: **riserva matematica prospettiva** all'epoca m

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} O_r v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r) v^{r-m}$$

valore attuale medio delle prestazioni erogate dal fondo dall'epoca m in poi _ valore attuale medio dei contributi pagati al fondo dall'epoca m in poi

Nel sistema finanziario di gestione della **ripartizione pura** si ha

$$O_r = \overline{\Theta}^{(r)} = C_r \qquad \forall r$$

Quindi

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r) v^{r-m} = 0$$

Nel sistema finanziario di gestione della **ripartizione dei capitali di copertura**, se l'erogazione delle pensioni è trasferita ad un ente esterno, si ha

$$O_r = \Theta^{(r)} = C_r \qquad \forall r$$

Quindi

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r) v^{r-m} = 0$$

LE RISERVE NEI SISTEMI A CAPITALIZZAZIONE

Nei sistemi finanziari a capitalizzazione si ha formazione di riserve.

La **riserva matematica prospettiva** all'epoca m

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} O_r v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$$

può essere espressa come somma di due componenti:

V_m^p riserva prospettiva dei pensionati o degli oneri maturati

V_m^a riserva prospettiva degli attivi o degli oneri latenti

$$V_m = V_m^a + V_m^P$$

Indicato con

$\theta^{(r)}$ il valore attuale medio all'epoca r degli oneri relativi alla generazione di nuovi pensionati dell'epoca r

la **riserva prospettiva degli attivi** è

$$V_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$$

La **riserva prospettiva dei pensionati** può essere espressa per differenza:

$$V_m^P = V_m - V_m^a = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m}$$

Vediamo come esprimere direttamente la riserva prospettiva dei pensionati, considerando separatamente due casi, a seconda che all'epoca 0 di avvio del fondo pensioni non siano, oppure siano, già presenti dei pensionati.

RISERVA PROSPETTIVA DEI PENSIONATI

I) Sia $\mathrm{O}_0 = 0$, quindi <u>all'epoca 0 non sono già presenti dei pensionati</u>

Indicati con

${}_s\overline{\theta}^{(r)}$ il valore medio delle pensioni da erogare all'epoca r ai pensionati con s anni di anzianità di pensionamento

$T = \omega_6 - 1 - (\alpha + 1)$ la massima anzianità di pensionamento

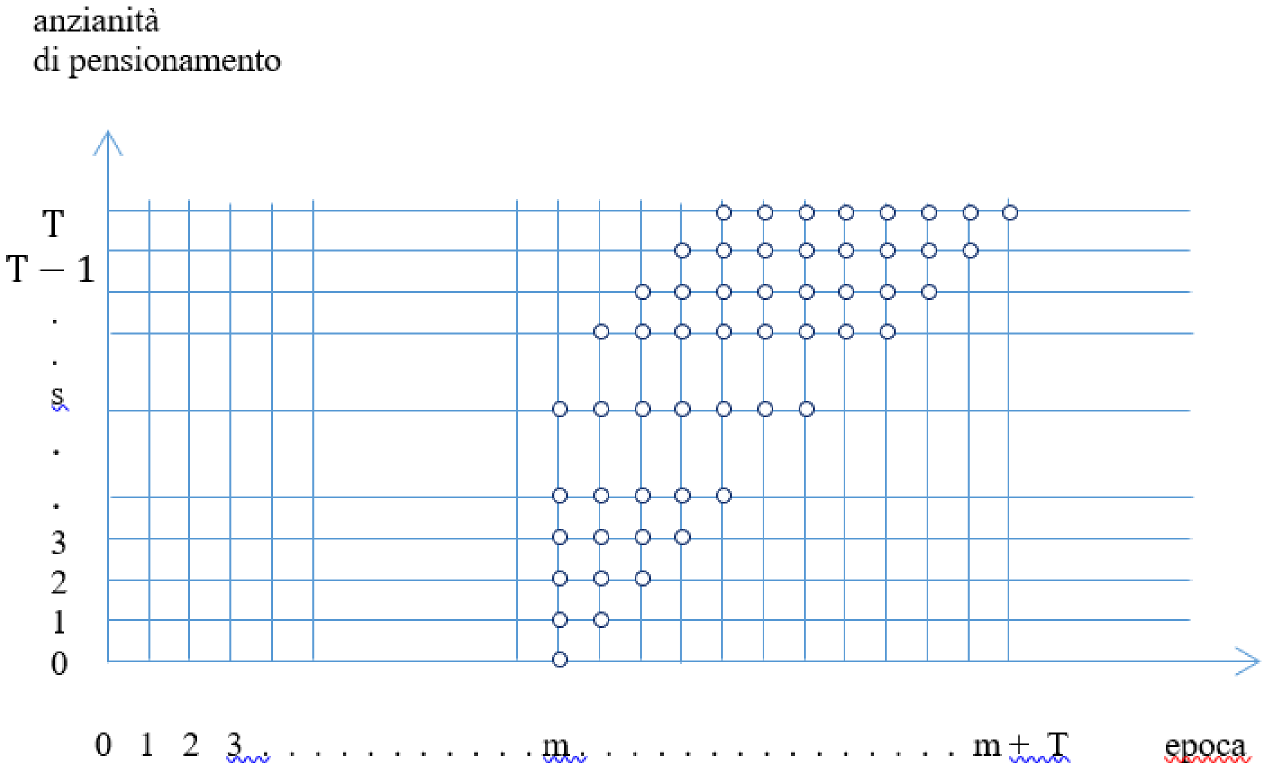
$T_r = \min(T,\ r-1)$ la massima anzianità di pensionamento per i pensionati presenti all'epoca r

si ha

$$\overline{\theta}^{(r)} = \sum_{s=0}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)} \qquad \text{e} \qquad \theta^{(r)} = \sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)} v^s$$

Risulta allora

$$V_m^P = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)} \right) v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)} v^s \right) v^{r-m}$$



Risulta quindi:

$$V_m^P = \sum_{r=m}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)}\, v^{r-m}\right) - \sum_{r=m+1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)}\, v^{s+r-m}\right) = \sum_{r=m}^{m+T}\left(\sum_{s=r-m}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)}\, v^{r-m}\right)$$

II) Sia $O_0 > 0$, quindi all’epoca 0 sono già presenti dei pensionati

(**generazione iniziale di pensionati**)

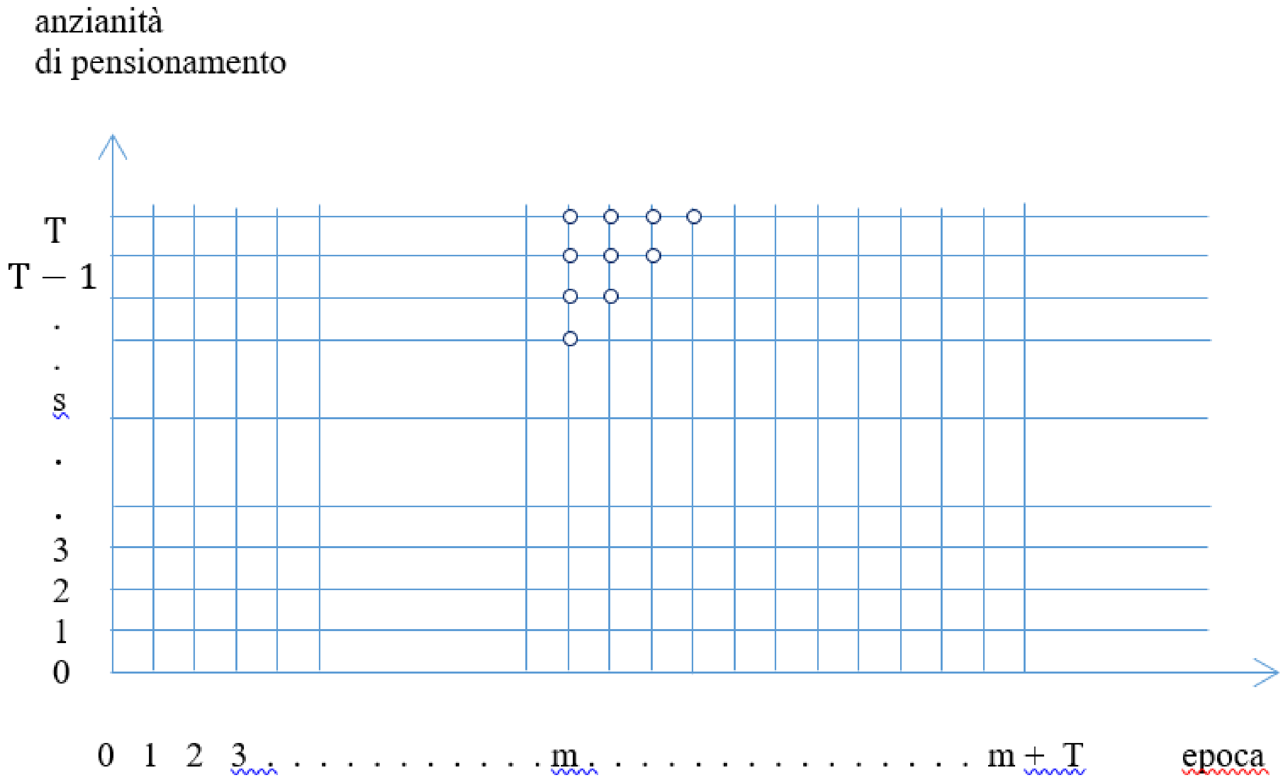
Oltre alla riserva dei pensionati V_m^P occorre valutare anche la riserva della generazione iniziale di pensionati.

Sia

${}_{(0)}V_m^P$ la riserva matematica prospettiva per la generazione iniziale di pensionati

Se $m > T$ allora ${}_{(0)}V_m^P = 0$

Se $m \leq T$ allora



$$_{(0)}V_m^P = \sum_{r=m}^{T} \left(\sum_{s=r}^{T} {}_s\overline{\Theta}^{(r)} \right) v^{r-m}$$

RISERVA PROSPETTIVA DEGLI ATTIVI

La riserva prospettiva degli attivi valutata all'epoca m è

$$V_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$$

dove

$\theta^{(r)} = \sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)} v^s$ è il valore attuale medio all'epoca r degli oneri relativi ai nuovi pensionati dell'epoca r

Esprimiamo

C_r valore medio dei contributi pagati all'epoca r nei tre sistemi finanziari di gestione della capitalizzazione.

a) <u>Sistema finanziario di gestione del premio individuale</u>

Con riferimento alla coorte di nuovi ingressi all'età x all'epoca k si ha

$$P_x^{(k)} S_x^{(k)} = C_x^{(k)} = O_x^{(k)}$$

essendo

$S_x^{(k)}$ il valore attuale medio dei salari percepiti da ciascun assicurato della coorte

$O_x^{(k)}$ il valore attuale medio degli oneri che deriveranno da tali assicurati

Il valore medio dei contributi pagati all'epoca r è

$$C_r = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\min\{r,\ \xi-1-x\}} P_x^{(r-t)} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)}$$

con

$\mathcal{S}_{x,t}^{(r)}$ il valore medio dei salari pagati all'epoca r agli assicurati entrati in assicurazione all'età x e presenti in assicurazione da t anni.

b) <u>Sistema finanziario di gestione del premio per generazioni</u>

Con riferimento alla generazione di nuovi ingressi all'epoca k si ha

$$P^{(k)}S^{(k)} = C^{(k)} = O^{(k)}$$

essendo

$S^{(k)}$ il valore attuale medio dei salari percepiti da ciascun assicurato della generazione

$O^{(k)}$ il valore attuale medio degli oneri che deriveranno da tali assicurati

Il valore medio dei contributi pagati all'epoca r è

$$C_r = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\min\{r,\ \xi-1-x\}} P^{(r-t)} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)}$$

c) <u>Sistema finanziario di gestione del premio medio generale</u>

Sia

P il premio medio generale

Il valore medio dei contributi pagati all'epoca r è

$$C_r = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\min\{r,\ \xi-1-x\}} P\, \mathcal{S}_{x,t}^{(r)} = P \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\min\{r,\ \xi-1-x\}} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)} = P\ \mathcal{S}^{(r)}$$

essendo

$\mathcal{S}^{(r)}$ il valore medio dei salari dell'epoca r.

Nella riserva prospettiva degli attivi valutata all'epoca m

$$V_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$$

si possono distinguere due componenti:

- la riserva prospettiva degli **assicurati presenti**: ${}^{p}V_m^a$
- la riserva prospettiva degli **assicurati futuri**: ${}^{f}V_m^a$

$$V_m^a = {}^{p}V_m^a + {}^{f}V_m^a$$

Riserva prospettiva degli assicurati presenti

Con riferimento alla coorte di attivi presente all'epoca m, con età di ingresso x ed anzianità t, siano

$O_{x,t}^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m degli oneri relativi a tali assicurati

$C_{x,t}^{(m)}$ il valore attuale medio dei contributi che saranno pagati da tali assicurati

La riserva prospettiva degli assicurati presenti è

$$ {}^{p}V_{m}^{a} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(O_{x,t}^{(m)} - C_{x,t}^{(m)} \right) $$

Si ha

a) Sistema finanziario di gestione del premio individuale: $C_{x,t}^{(m)} = P_{x}^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)}$

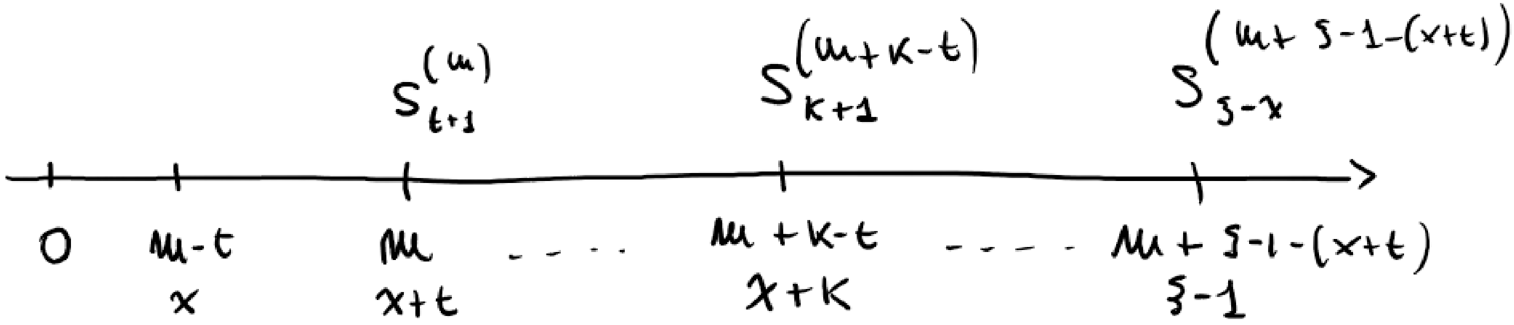
b) Sistema finanziario di gestione del premio per generazioni: $C_{x,t}^{(m)} = P^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)}$

c) Sistema finanziario di gestione del premio medio generale: $C_{x,t}^{(m)} = P\, S_{x,t}^{(m)}$

con

$S_{x,t}^{(m)}$ il valore attuale medio dei salari che saranno pagati da tali assicurati.

Valore attuale medio dei salari



Si ha

$$S_{x,t}^{(m)} = \ell^{1(m)}(x,t) \sum_{k=t}^{\xi-1-x} {}_{k-t}p_{[x]+t}^{1}\, s_{k+1}^{(m+k-t)} v^{k-t}$$

dove $\ell^{1(m)}(x,t)$ è il numero di assicurati presenti in m con età x+t essendo entrati in assicurazione all'età x.

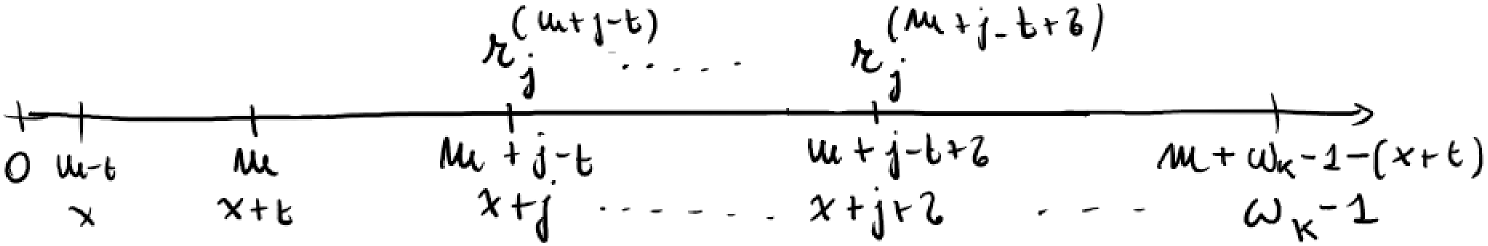
Valore attuale medio degli oneri

Si ha

$$O_{x,t}^{(m)} = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}O_{x,t}^{(m)} + {}^{5}O_{x,t}^{(m)} + \sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}O_{x,t}^{(m)}$$

Risulta

- valore attuale medio degli oneri per pensionati diretti (k=2, 3, 4):

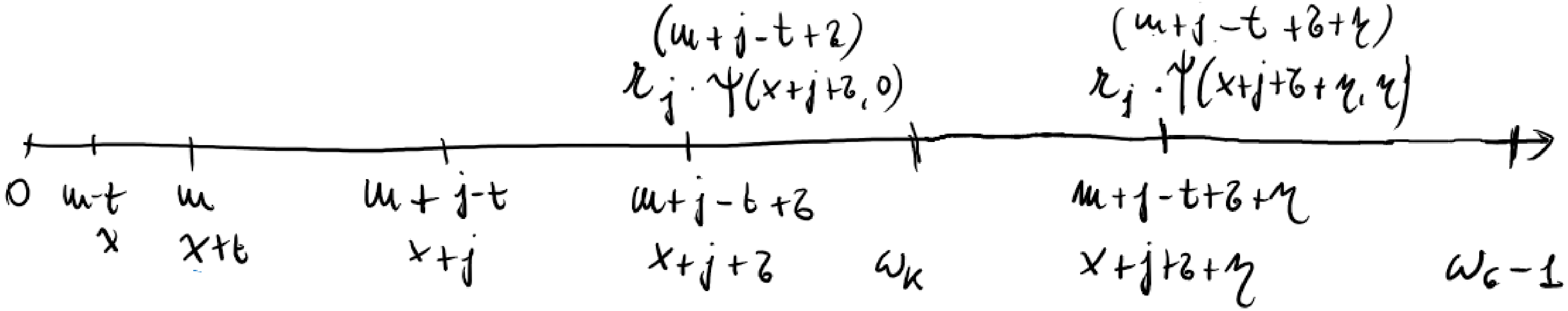


$${}^{k}O_{x,t}^{(m)} = \ell^{1(m)}(x,t) \sum_{j=t+1}^{\xi-x} {}_{j-t-1}p_{[x]+t}^{1}\; q_{[x]+j-1}^{1,k} v^{j-t} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+j)} {}_{\tau}p_{[x+j]}^{k} r_j^{(m+j-t+\tau)} v^{\tau}$$

- valore attuale medio degli oneri per pensionati indiretti:

$${}^{5}O_{x,t}^{(m)} = \ell^{1(m)}(x,t) \sum_{j=t+1}^{\xi-x} {}_{j-t-1}p_{[x]+t}^{1}\; q_{[x]+j-1}^{1,5} v^{j-t} \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-x-j} {}_{\tau}p_{[x+j]}^{5} r_j^{(m+j-t+\tau)} \psi(x+j+\tau,\tau)\; v^{\tau}$$

- valore attuale medio degli oneri per pensionati di reversibilità:



$$
{}^{(k,6)}O_{x,t}^{(m)} = \ell^{1(m)}(x,t) \sum_{j=t+1}^{\xi-x} {}_{j-t-1}p_{[x]+t}^{1}\, q_{[x]+j-1}^{1,k} v^{j-t} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-x-j} {}_{\tau-1}p_{[x+j]}^{k}\, q_{[x+j]+\tau-1}^{k,6}\, v^{\tau} \cdot
$$

$$
\cdot \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-x-j-\tau} {}_{\eta}p_{[x+j+\tau]}^{6}\, r_j^{(m+j-t+\tau+\eta)}\, \psi(x+j+\tau+\eta,\eta) v^{\eta}
$$

k=2, 3, 4

Riserva prospettiva degli assicurati futuri

La riserva prospettiva degli assicurati futuri è

$$ {}^{f}V_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty} \left(O^{(r)} - C^{(r)}\right) v^{r-m} $$

dove, con riferimento alla generazione di attivi entrati in assicurazione all'epoca r,

$O^{(r)}$ è il valore attuale medio degli oneri

$C^{(r)}$ è il valore attuale medio dei contributi

Nel caso di sistema finanziario di gestione del:

a) premio individuale: $C_x^{(r)} = P_x^{(r)} S_x^{(r)} = O_x^{(r)}$ $\forall$ x e $\forall$ r $\Rightarrow$ $C^{(r)} = O^{(r)}$ $\forall$ r

quindi, ${}^{f}V_m^a = 0$

b) premio per generazioni: $C^{(r)} = P^{(r)} S^{(r)} = O^{(r)}$ $\forall$ r , quindi ${}^{f}V_m^a = 0$

c) premio medio generale: $C^{(r)} = P \;\; S^{(r)}$ $\forall$ r, si ha

$$ {}^{f}V_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty} \left(O^{(r)} - P\, S^{(r)}\right) v^{r-m} \,. $$

RISERVA DEI SOPRAPREMI

Nel sistema finanziario di gestione del premio medio generale, il premio medio P è diverso dai premi individuali. Si pone allora il problema di determinare l'effetto sulla riserva degli attivi prodotto dall'adozione del premio medio generale rispetto ai premi individuali.

Siano

- P il premio medio generale
- $P_x^{(k)}$ il premio individuale per un assicurato entrato all'epoca k con età x

Si definisce **soprapremio**: $\varepsilon_x^{(k)} = P - P_x^{(k)}$

Il soprapremio può essere negativo, nullo o positivo.

La riserva degli attivi è valutata sulla base del premio medio generale P.

Poiché $P = \varepsilon_x^{(k)} + P_x^{(k)}$

si vuole valutare il contributo dei soprapremi nella valutazione della riserva degli attivi.

Si ha

$$V_m^a = {}^pV_m^a + {}^fV_m^a = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x}\left(O_{x,t}^{(m)} - P\,S_{x,t}^{(m)}\right) + \sum_{r=m+1}^{\infty}\left(O^{(r)} - P\,S^{(r)}\right)v^{r-m} =$$

$$= \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x}\left(O_{x,t}^{(m)} - \left(\varepsilon_x^{(m-t)} + P_x^{(m-t)}\right)\,S_{x,t}^{(m)}\right) + \sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\left(O_x^{(r)} - \left(\varepsilon_x^{(r)} + P_x^{(r)}\right)S_x^{(r)}\right)v^{r-m} =$$

$$= \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x}\left(O_{x,t}^{(m)} - P_x^{(m-t)}\,S_{x,t}^{(m)}\right) + \sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\left(O_x^{(r)} - P_x^{(r)}\,S_x^{(r)}\right)v^{r-m} +$$

$$-\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x}\varepsilon_x^{(m-t)}\,S_{x,t}^{(m)} - \sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\varepsilon_x^{(r)}\,S_x^{(r)}\;v^{r-m}$$

Si definiscono le **riserve individuali**

<u>degli assicurati presenti</u> $\quad {}^p_IV_m^a = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x}\left(O_{x,t}^{(m)} - P_x^{(m-t)}\,S_{x,t}^{(m)}\right)$

<u>degli assicurati futuri</u> $\quad {}^f_IV_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\left(O_x^{(r)} - P_x^{(r)}\,S_x^{(r)}\right)v^{r-m}$

Poiché $O_x^{(r)} = P_x^{(r)}\,S_x^{(r)}$ risulta ${}^{f}_{I}V_m^a = 0$

ed è allora:

$$V_m^a = {}^{p}_{I}V_m^a - \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x} \varepsilon_x^{(m-t)}\,S_{x,t}^{(m)} - \sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \varepsilon_x^{(r)}\,S_x^{(r)}\;v^{r-m}$$

dove

$$\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=0}^{\xi-1-x} \varepsilon_x^{(m-t)}\,S_{x,t}^{(m)}$$

è la <u>riserva dei soprapremi degli assicurati presenti</u>

$$\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \varepsilon_x^{(r)}\,S_x^{(r)}\;v^{r-m}$$

è la <u>riserva dei soprapremi degli assicurati futuri</u>

LE RISERVE NEL SISTEMA DI RIPARTIZIONE DEI CAPITALI DI COPERTURA

Abbiamo definito la riserva matematica prospettiva all'epoca m:

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} O_r v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r) v^{r-m}$$

Nel sistema finanziario di gestione della ripartizione dei capitali di copertura si ha

$\mathcal{P}^{(r)}$ il premio di copertura dei capitali per l'anno di gestione (r, r+1) tale che

$$C_r = \mathcal{P}^{(r)} \mathcal{S}^{(r)} = \Theta^{(r)}$$

Se $O_r = \Theta^{(r)}$ l'ammontare degli oneri O_r è uguale al valore attuale medio degli oneri che verranno erogati al gruppo dei neo-pensionati dell'anno r ed ai loro nuclei superstiti (per esempio, si trasferisce all'esterno il pagamento delle rate di pensione);

si ha

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r) v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} (\Theta^{(r)} - C_r) v^{r-m} = 0$$

Se $\quad O_r = \overline{\theta}^{(r)}$ l'ammontare degli oneri O_r è uguale al valore medio degli oneri per i pensionati presenti all'epoca r (le rate di pensione sono pagate dal fondo stesso);

si ha

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} O_r v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m}$$

Posto

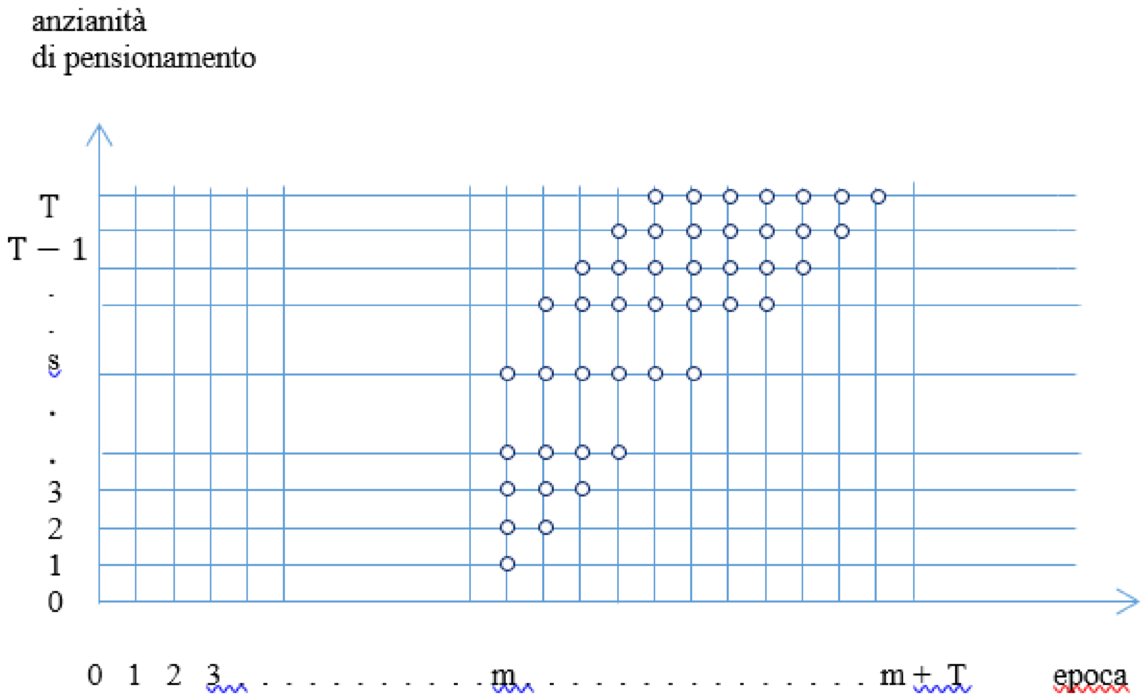
${}_s\overline{\theta}^{(r)}$ il valore medio delle pensioni da erogare all'epoca r ai pensionati con s anni di anzianità di pensionamento

$T = \omega_6 - 1 - (\alpha + 1)$ la massima anzianità di pensionamento

$T_r = \min(T,\ r-1)$ la massima anzianità di pensionamento dei pensionati all'epoca r

si ha $\quad \overline{\theta}^{(r)} = \sum_{s=0}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)}$ e $\quad \theta^{(r)} = \sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)} v^s$ e quindi

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)} \right) v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)} v^s \right) v^{r-m}$$



Risulta allora:

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)}\, v^{r-m}\right) - \sum_{r=m}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{T} {}_s\overline{\theta}^{(r+s)}\, v^{s+r-m}\right) = \sum_{r=m}^{m-1+T}\left(\sum_{s=r-m+1}^{T_r} {}_s\overline{\theta}^{(r)}\right) v^{r-m}$$

valore attuale medio degli oneri per i pensionati andati in pensione prima dell'epoca m.

Determiniamo la riserva dei pensionati e la riserva degli attivi.

Per la riserva prospettiva degli attivi si ha

$$V_m^a = \sum_{r=m+1}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m+1}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m} = -\Theta^{(m)}$$

Infatti, dall'epoca m+1 in poi i valori attuali medi degli oneri sono coperti dai valori attuali medi dei contributi.

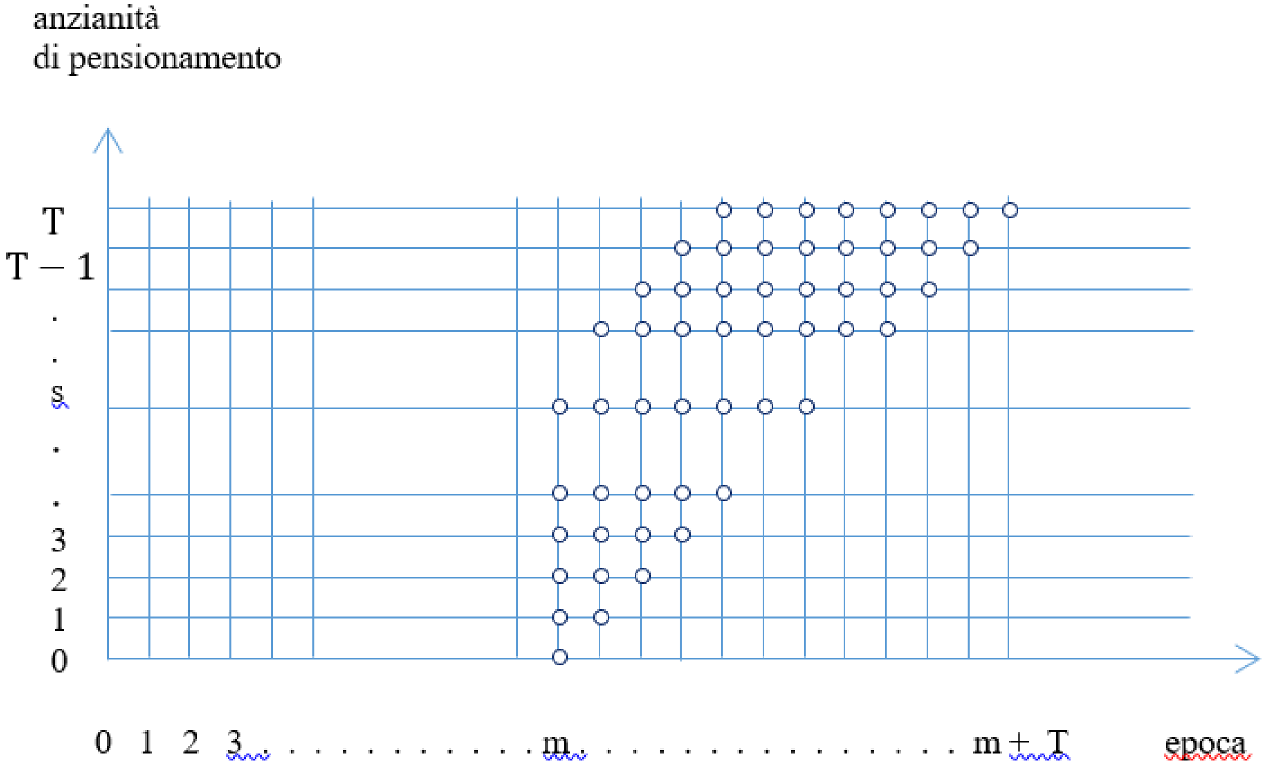
Dalla

$$V_m = V_m^a + V_m^P$$

si ottiene la riserva prospettiva dei pensionati.

La riserva prospettiva dei pensionati è allora

$$V_m^P = V_m - V_m^a = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m} - \left(-\theta^{(m)}\right) = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} \theta^{(r)} v^{r-m}$$



FORMULE RICORRENTI DELLA RISERVA

Riprendiamo l'espressione della riserva matematica prospettiva all'epoca m:

$$V_m = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \overline{\Theta}^{(m)} - C_m + \sum_{r=m+1}^{\infty} \overline{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} C_r v^{r-m} =$$

$$= \overline{\Theta}^{(m)} - C_m + v \left[\sum_{r=m+1}^{\infty} \overline{\Theta}^{(r)} v^{r-(m+1)} - \sum_{r=m+1}^{\infty} C_r v^{r-(m+1)} \right] = \overline{\Theta}^{(m)} - C_m + v\ V_{m+1}$$

Dalla

$$V_m = \overline{\Theta}^{(m)} - C_m + v\ V_{m+1}$$

posto $v = \frac{1}{1+j}$ si ottiene la seguente relazione ricorrente:

$$V_{m+1} = \left(V_m + C_m - \overline{\Theta}^{(m)} \right) (1+j)$$

Si ottiene inoltre la seguente scomposizione dei contributi C_m:

$$C_m = \overline{\Theta}^{(m)} + v\ V_{m+1} - V_m$$