

APPROCCI DI SIMULAZIONE STOCASTICA PER VALUTAZIONI IN UN FONDO PENSIONI

- Simulazione stocastica
- Il metodo M.A.G.I.S.
- Un metodo con parametro operativo l'individuo
- Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

SIMULAZIONE STOCASTICA

La simulazione è un procedimento per la costruzione numerica di campioni di un processo stocastico per valutare grandezze di interesse (valori medi di grandezze aleatorie), ma anche momenti di ordine superiore e l'intera distribuzione di probabilità.

Simulazione della durata aleatoria di vita

Sia

T_x n.a. durata aleatoria di vita troncata per un individuo di età x

Si ha $T_x = h$ se l'individuo decede tra le età $x + h$ e $x + h + 1$

Le determinazioni di T_x sono: $h = 0, 1, 2, \dots, (\omega - 1) - x$

La funzione di ripartizione di T_x è

$$F_{T_x}(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ 1 - \int_0^y p_x & \text{per } 0 \leq y < \omega - 1 - x \\ 1 & \text{per } y \geq \omega - 1 - x \end{cases}$$

dove $\text{int}(y)$ è la parte intera di y .

Per simulare T_x si tratta di simulare un n.a. con distribuzione discreta

Simulazione del n.a. T_x

Si genera un numero pseudocasuale, sia u il numero simulato

- | | | |
|---|--------------------------------------|------------------|
| se $0 \leq u \leq F_{T_x}(0) = q_x$ | la realizzazione simulata di T_x è | 0 |
| se $F_{T_x}(0) < u \leq F_{T_x}(1)$ | la realizzazione simulata di T_x è | 1 |
| | | |
| se $F_{T_x}(\omega - 3 - x) < u \leq F_{T_x}(\omega - 2 - x)$ | la realizzazione simulata di T_x è | $\omega - 2 - x$ |
| se $F_{Z_x}(\omega - 2 - x) < u \leq 1$ | la realizzazione simulata di T_x è | $\omega - 1 - x$ |

Simulazione della durata residua di lavoro per un attivo

Consideriamo un attivo di età x

I) Simulazione dell'ulteriore durata di permanenza nel gruppo degli attivi

Siano

Z_x n.a. ulteriore durata di permanenza (troncata) nel gruppo degli attivi (in anni)
 ξ l'età di vecchiaia

Si ha $Z_x = t$ se l'individuo è attivo all'età $x+t$ e non è più attivo all'età $x+t+1$

Le determinazioni di Z_x sono: $0, 1, 2, \dots, \xi-1-x$
con probabilità: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{\xi-x}$

Si ha

$$p_j = \Pr\{Z_x = j - 1\} = {}_{j-1}p_x \cdot {}^a q_{x+j-1}$$

in particolare:

$$p_1 = \Pr\{Z_x = 0\} = {}_0p_x \cdot {}^a q_x = {}^a q_x$$

$$p_{\xi-x} = \Pr\{Z_x = \xi - 1 - x\} = {}_{\xi-1-x}p_x \cdot {}^a q_{\xi-1} = {}_{\xi-1-x}p_x$$

La funzione di ripartizione di Z_x è

$$F_{Z_x}(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ 1 - \text{int}(y)+1^a p_x & \text{per } 0 \leq y < \xi - 1 - x \\ 1 & \text{per } y \geq \xi - 1 - x \end{cases}$$

dove $\text{int}(y)$ è la parte intera di y

Simulazione del n.a. Z_x

Si genera un numero pseudocasuale, sia u il numero simulato

se $0 \leq u \leq F_{Z_x}(0) = {}^a q_x$ la realizzazione simulata di Z_x è 0

se $F_{Z_x}(0) < u \leq F_{Z_x}(1)$ la realizzazione simulata di Z_x è 1

.....

se $F_{Z_x}(\xi - 3 - x) < u \leq F_{Z_x}(\xi - 2 - x)$ la realizzazione simulata di Z_x è $\xi - 2 - x$

se $F_{Z_x}(\xi - 2 - x) < u \leq 1$ la realizzazione simulata di Z_x è $\xi - 1 - x$

II) Simulazione della causa di uscita

Si distinguono i due casi:

- i. uscita per morte, invalidità o altra causa
- ii. uscita per morte, invalidità, altra causa oppure vecchiaia

Sia t la determinazione simulata di Z_x allora l'attivo è eliminato tra le età $x+t$ e $x+t+1$

Caso i.

Se $u \leq F_{Z_x}(\xi - 2 - x) \rightarrow Z_x \leq \xi - 2 - x \rightarrow$ l'eliminazione può avvenire per le cause: morte, invalidità o altra causa, ma non per la causa vecchiaia

Caso ii.

Se $u > F_{Z_x}(\xi - 2 - x) \rightarrow Z_x = \xi - 1 - x \rightarrow$ l'eliminazione può avvenire per le cause: morte, invalidità, altra causa oppure vecchiaia

Caso i.

Per determinare la causa di eliminazione (morte, invalidità o altra causa) si simula un n.a. con 3 determinazioni, con probabilità (condizionata di eliminazione)

$${}^a q_{x+t}^d = \frac{{}^a q_{x+t}^d}{{}^a q_{x+t}}, \quad {}^a q_{x+t}^i = \frac{{}^a q_{x+t}^i}{{}^a q_{x+t}}, \quad {}^a q_{x+t}^w = \frac{{}^a q_{x+t}^w}{{}^a q_{x+t}}$$

probabilità di eliminazione per le varie cause, condizionate al verificarsi dell'eliminazione tra le età $x+t$ e $x+t+1$

con ${}^a q_{x+t} = {}^a q_{x+t}^d + {}^a q_{x+t}^i + {}^a q_{x+t}^w$

Caso ii.

Per determinare la causa di eliminazione (morte, invalidità, altra causa o vecchiaia) si simula un n.a. con 4 determinazioni, con probabilità

$${}^a q_{\xi-1}^d, \quad {}^a q_{\xi-1}^i, \quad {}^a q_{\xi-1}^w, \quad {}^a q_{\xi-1}^v$$

probabilità di eliminazione per le varie cause (infatti ${}^a q_{x+t} = 1$).

IL METODO M.A.G.I.S.

(Metodo degli Anni di Gestione su base Individuale e per Sorteggio)

Si fissa l'attenzione su un singolo periodo, tipicamente l'anno, e si procede alla simulazione delle variabili aleatorie relative a tale periodo per tutti i componenti la collettività.

Poiché le operazioni vanno ripetute periodo dopo periodo, si dice che

si assume il **tempo** come parametro operativo

inoltre, si considerano tutti gli individui, attivi e pensionati, quindi

la simulazione è fatta su base individuale

Dati disponibili per ogni individuo:

- età e sesso;
- posizione previdenziale:
 - attivo o pensionato (tipo di pensione)
 - composizione familiare
 - se attivo, categoria lavorativa e livello di carriera
 - altre informazioni rilevanti per determinare salari, pensioni, ...

Il metodo M.A.G.I.S.

Per ogni anno di gestione e per ogni individuo si considerano tutti gli **eventi** che modificano la loro posizione previdenziale:

- passaggio da attivo a pensionato
- decesso
- variazioni salariali
- variazioni delle pensioni

si simulano tali eventi per determinare i

numeri medi di attivi

numeri medi di pensionati

e valutare gli oneri e i contributi nell'anno.

Per ogni **attivo** si effettuano tre gruppi di simulazioni:

I) Si simulano gli eventi che determinano la permanenza nel gruppo degli attivi oppure il passaggio ad altro gruppo

a) si simula un n.a. con 5 determinazioni, corrispondenti agli eventi:

- permanenza nel gruppo degli attivi
- uscita per invalidità
- uscita per vecchiaia
- uscita per altre cause
- uscita per morte

oppure:

b) si simula un n.a. con 2 determinazioni corrispondenti agli eventi:

- permanenza nel gruppo degli attivi
- uscita dal gruppo degli attivi

si simula quindi un n.a. con 4 determinazioni corrispondenti alle cause di uscita

II) Si simula la composizione familiare

III) Si simulano cambiamenti di categoria lavorativa e avanzamenti di carriera

Il metodo M.A.G.I.S.

Per ogni **pensionato diretto** si effettuano due gruppi di simulazioni:

- I) Si simula l'eventuale uscita dal gruppo dei pensionati diretti
- II) Si simula la composizione familiare

Per ogni **pensionato indiretto** o di **reversibilità**:

- I) Si simula la composizione familiare

UN METODO CON PARAMETRO OPERATIVO L'INDIVIDUO

Per ogni individuo si simula la sua intera storia, compresa quella dei componenti il nucleo superstite.

Quindi

si assume l'**individuo** come parametro operativo

Dati disponibili per ogni individuo:

- età e sesso;
- posizione previdenziale:
 - attivo o pensionato (tipo di pensione)
 - composizione familiare
 - se attivo, categoria lavorativa e livello di carriera
 - altre informazioni rilevanti per determinare salari, pensioni, ...

Simulazioni per i **nuclei superstiti** (di attivo o di pensionato)

- I) Per ogni individuo del gruppo si simula l'ulteriore durata di vita
- II) Tenendo conto degli elementi di carattere deterministico (limiti di età, ...) e di carattere aleatorio (nuovo matrimonio, avvio di attività lavorativa, ...) si simula l'andamento nel tempo della composizione familiare

Esempio - Fondo pensioni in cui:

se il coniuge si risposa esce dal nucleo superstiti;

un figlio che non lavora rimane nel nucleo fino all'età di 26 anni.

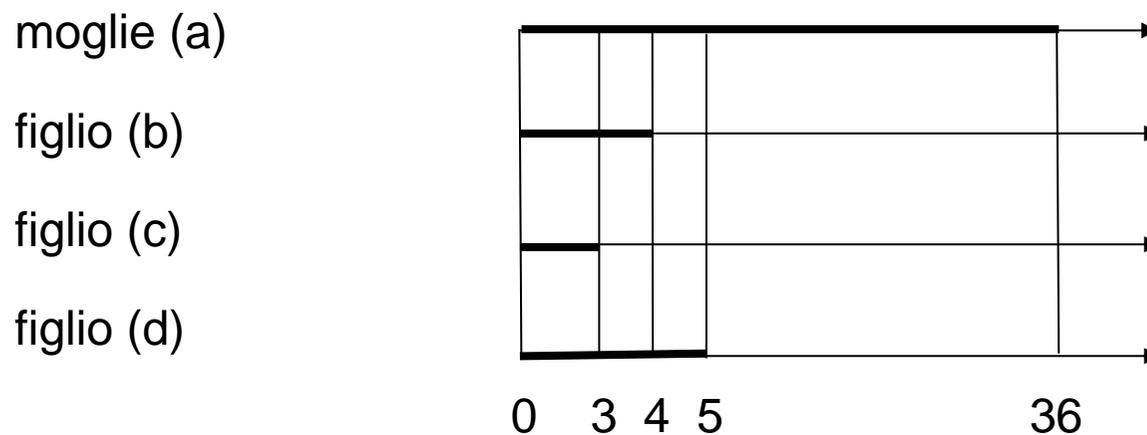
Aliquote della pensione del dante causa pari al 60% per un solo componente, all'80% per due componenti, al 100% per tre o più componenti.

Nucleo superstiti così composto:

- (a) coniuge (moglie) di 48 anni,
- (b) un figlio maschio di 22 anni che non lavora,
- (c) un figlio femmina di 20 anni che non lavora,
- (d) un figlio maschio di 17 anni che non lavora.

Esempio di simulazione

- la moglie (a) muore a 84 anni senza essersi risposata,
- il figlio (b) muore a 75 anni e non comincia a lavorare prima dei 26 anni,
- la figlia (c) muore a 80 anni e comincia a lavorare a 23 anni,
- il figlio (d) muore a 22 anni e non intraprende un'attività lavorativa.



Il nucleo sopravvive per 36 anni a partire dall'epoca 0 delle valutazioni

L'aliquota di pensione del dante causa percepita è:

- 100% fino all'epoca 4
- 80% dall'epoca 4 all'epoca 5
- 60% dall'epoca 5 all'epoca 36

Un metodo con parametro operativo l'individuo

Simulazioni per i **pensionati diretti**

Per ogni pensionato diretto si simula:

- I) l'ulteriore durata di vita
- II) la composizione del nucleo superstite

Simulazioni per gli **attivi**

Per ogni attivo si simula:

- I) l'ulteriore durata di permanenza nel gruppo degli attivi
- II) gli avanzamenti di carriera
- III) la causa di uscita:
 - se esce diventando pensionato diretto si simula la sua “storia” da pensionato
 - se esce per morte lasciando nucleo superstite si procede simulando la “storia” del nucleo superstite

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

UN PROCEDIMENTO PER LA SIMULAZIONE DEL PREMIO MEDIO GENERALE E DELL'ANDAMENTO DEL FONDO

Consideriamo l'istituzione di un fondo pensioni costituito soltanto da un gruppo di attivi e chiuso a nuovi ingressi.

Siano salari e pensioni costanti per tutta la durata della gestione
salari e oneri pagati annualmente in via anticipata

Ci siano soltanto pensioni di vecchiaia senza nuclei superstiti

Consideriamo un procedimento simulativo con parametro operativo l'individuo per determinare:

- il premio medio generale
- l'andamento del fondo

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

Siano noti

s_0 ammontare complessivo dei salari degli attivi all'epoca 0

o_0 ammontare complessivo degli oneri dei pensionati all'epoca 0

Indichiamo con

$\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_m, \dots$ la successione dei n.a. relativi agli **oneri**

$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_m, \dots$ la successione dei n.a. relativi ai **salari**

Siano

\tilde{N}_1 il n.a. di anni per cui saranno pagate pensioni o rimborsati contributi, quindi

$$\tilde{O}_{\tilde{N}_1} > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{O}_m = 0 \quad \text{per } m > \tilde{N}_1$$

\tilde{N}_2 il n.a. di anni per cui saranno percepiti salari e quindi pagati contributi

$$\tilde{S}_{\tilde{N}_2} > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{S}_m = 0 \quad \text{per } m > \tilde{N}_2$$

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

Il n.a. **premio medio generale** è allora così definito:

$$\tilde{P} = \frac{\sum_{m=0}^{\tilde{N}_1} \tilde{O}_m v^m}{\sum_{m=0}^{\tilde{N}_2} \tilde{S}_m v^m}$$

dove

v è il fattore di attualizzazione corrispondente al tasso tecnico di interesse i , supposto noto e costante nel tempo

I n.a. **contributi** all'epoca m ($m=0, 1, \dots$) sono così definiti

$$\tilde{C}_m = \tilde{P} \tilde{S}_m$$

Il n.a. **consistenza del fondo** all'epoca $m+1$ ($m=0, 1, \dots$) è così definito

$$\tilde{F}_{m+1} = \begin{cases} 0 & \text{per } m = 0 \\ (\tilde{F}_m + \tilde{C}_m - \tilde{O}_m)(1 + i) & \text{per } m = 1, 2, \dots, \tilde{N}_2 \\ (\tilde{F}_m - \tilde{O}_m)(1 + i) & \text{per } m = \tilde{N}_2 + 1, \dots, \tilde{N}_1 \\ 0 & \text{per } m = \tilde{N}_1 + 1, \dots \end{cases}$$

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

Per la simulazione dell'andamento del **fondo** invece di simulare i n.a.

$\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_m, \dots$ successione degli oneri

$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_m, \dots$ successione dei salari

poiché la collettività è chiusa, risulta più economico per il calcolo simulare le variazioni di salari ed oneri:

$$\Delta\tilde{O}_m = \begin{cases} \tilde{O}_1 - o_0 & \text{per } m = 1 \\ \tilde{O}_m - \tilde{O}_{m-1} & \text{per } m = 2, \dots, \tilde{N}_1 \end{cases}$$

$$\Delta\tilde{S}_m = \begin{cases} \tilde{S}_1 - s_0 & \text{per } m = 1 \\ \tilde{S}_m - \tilde{S}_{m-1} & \text{per } m = 2, \dots, \tilde{N}_2 \end{cases}$$

da queste poi si ottengono i valori simulati di \tilde{O}_m , \tilde{S}_m e quindi \tilde{P} , \tilde{C}_m ed \tilde{F}_m

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

Indichiamo con

$$n_1, \quad n_2, \quad \text{e} \quad \Delta o_m, \quad m=1, \dots, n_1 \quad \Delta s_m, \quad m=1, \dots, n_2$$

le determinazioni simulate dei corrispondenti n.a.

Da queste si calcolano

- la successione dei valori simulati degli oneri annui

$$o_m = o_{m-1} + \Delta o_m \quad \text{per } m = 1, 2, \dots, n_1$$

- la successione dei valori simulati dei salari annui

$$s_m = s_{m-1} + \Delta s_m \quad \text{per } m = 1, 2, \dots, n_2$$

- il valore simulato del premio medio generale

$$p = \frac{\sum_{m=0}^{n_1} o_m v^m}{\sum_{m=0}^{n_2} s_m v^m}$$

- la successione dei valori simulati dei contributi annui

$$c_m = p s_m \quad \text{per } m = 1, 2, \dots, n_2$$

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

Infine si calcola il valore simulato della consistenza del fondo nelle varie epoche

$$f_{m+1} = \begin{cases} 0 & \text{per } m = 0 \\ (f_m + c_m - o_m)(1 + i) & \text{per } m = 1, 2, \dots, n_2 \\ (f_m - o_m)(1 + i) & \text{per } m = n_2 + 1, \dots, n_1 \\ 0 & \text{per } m = n_1 + 1, \dots \end{cases}$$

Esempio 10.4. Consideriamo una collettività costituita da 5 attivi e 0 pensionati. Il salario di ciascun attivo sia pari a 10 unità monetarie (costante nel tempo) e la rata di pensione sia di 7 unità monetarie (costante nel tempo e uguale per tutti); non teniamo conto di nuclei superstiti, né di uscite per altre cause oltre al pensionamento per gli attivi e alla morte per i pensionati.

Si riporta nelle seguente tabella il risultato di una simulazione

individuo	epoca di pensionamento	epoca di morte
1	2	4
2	3	5
3	3	6
4	4	7
5	4	7

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

Per ciascun individuo si calcolano i valori simulati Δs_m e Δo_m

individuo	Δs_m						
1	-10						
2		-10					
3			-10				
4				-10			
5					-10		
epoca	1	2	3	4	5	6	7

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

individuo	Δo_m						
1		7		-7			
2			7		-7		
3			7			-7	
4				7			-7
5				7			-7
epoca	1	2	3	4	5	6	7

da cui risulta

Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo

epoca	Δs_m	s_m	Δo_m	o_m
0	0	50	0	0
1	0	50	0	0
2	-10	40	7	7
3	-20	20	14	21
4	-20	0	7	28
5	0	0	-7	21
6	0	0	-7	14
7	0	0	-14	0

$n_2 = 3, n_1 = 6$.