Serie Storiche Economiche

6. Medie mobili

Le medie mobili

La descrizione analitica dei fenomeni funziona solo finché questi sono regolari;

- Non sempre esiste un'opportuna funzione analitica
- Un'alternativa alla modellazione analitica consiste nella stima empirica della componente di fondo, senza necessariamente individuare una legge di variazione

Uno strumento semplice e flessibile: la media mobile

- la media mobile è una trasformazione lineare delle osservazioni

Le procedure basate su medie mobili vengono usate per

- stimare il trend
- destagionalizzare
- ridurre la componente erratica

Le medie mobili: motivazione

Le medie mobili vengono scelte in modo da eliminare

- il trend
- o la stagionalità
- in ogni caso, si vuole ridurre/eliminare la componente erratica.

Le medie mobili: motivazione - 2

Consideriamo una serie storica additiva:

$$y_t = T_t + S_t + e_t$$

(consideriamo la componente ciclica come parte del trend)

Un modo semplice per determinare una delle componenti (es.: il trend) consiste nell'applicare alla serie una trasformazione lineare g che conservi la componente in questione ed annulli le altre
Indichiamo con

$$y_t^*, T_t^*, S_t^*, e_t^*$$

la serie e le componenti trasformate tramite g: non è facile trovare una trasformazione che faccia esattamente quello che vogliamo.

Le medie mobili: definizione

Caratteristiche desiderabili:

- calcoli semplici
- aggiornamento facile
- adattabilità a cambiamenti di regime

Media mobile: una somma pesata dei valori della serie storica "intorno" a t (è una tecnica di carattere locale)

$$y_t^* = \theta_{-m_1} y_{t-m_1} + \ldots + \theta_0 y_t + \ldots + +\theta_{m_2} y_{t+m_2} = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i y_{t+i}$$

con $m_1, m_2 \in N$, $\theta_{-m_1}, \ldots, \theta_{m_2} \in R$
Il numero di termini $m_1 + m_2 + 1$ viene detto ordine della media mobile.
La formula ha senso per $m + 1 < t < n - m_2$ ovvero non si può usare per calcolare gli estremi della serie $y_1^*, \ldots, y_{m_1}^*$ e $y_{m_2+1}^*, \ldots, y_n^*$.

Le medie mobili: definizione - 2

Usando l'operatore ritardo:

$$y_t^* = [\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i}] y_t = M y_t$$

Definiamo media mobile l'applicazione

$$M = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i}$$

combinazione lineare finita con pesi θ_i di potenze successive dell'operatore ritardo B.

Medie mobili semplici e centrate

Media mobile semplice: i pesi sono tutti uguali e pari a

$$\theta_i = \frac{1}{m_1 + m_2 + 1}, i = -m_1, \ldots, m_2$$

Inoltre, se $m_1 = m_2 = m$,

$$y_t^* = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^{m} y_{t+i}, t = m+1, \ldots, n-m$$

la media mobile viene detta centrata: y_t^* viene riferita all'istante centrale dell'intervallo di calcolo.

Si osservi che in questo caso l'indice della media mobile è dispari. Se fosse pari, il valore calcolato si collocherebbe a cavallo di due periodi.

Medie mobili di ordine pari

Una media mobile di ordine pari si riferirebbe a una coppia di istanti. Per ottenere da una media mobile di ordine pari un valore riferibile a un istante di tempo t, si calcola la semisomma di due medie mobili consecutive:

$$y_t^{**} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{t-m} + \ldots, + y_{t+m-1}}{2m} + \frac{y_{t-m+1} + \ldots, + y_{t+m}}{2m}\right)$$

ovvero si calcola una media di ordine $2m + 1$ ma si pesano gli estremi per $\frac{1}{4m}$ e tutti gli altri valori per $\frac{1}{2m}$.

Composizione di medie mobili

La composizione (o prodotto) di due medie mobili M_1, M_2 è

$$M : My_t = M_1 M_2 y_t$$

L'applicazione composta è ancora una media mobile
La composizione di medie mobili gode delle proprietà della moltiplicazione, in particolare è commutativa: $M_1 M_2 = M_2 M_1$
ovvero non importa in che ordine si applichi la media mobile.
Esempio: per centrare la media di ordine pari abbiamo applicato la media di ordine 2 a una media di ordine m; si ottiene lo stesso risultato applicando una media di ordine m a una media di ordine 2.
Inoltre:

- componendo due medie mobili centrate si ottiene ancora una media centrata
- (componendo due medie non centrate si ottiene una media centrata)

Medie mobili simmetriche

Una media mobile è simmetrica se

- è centrata
- sono uguali i coefficienti con indice simmetrico $\theta_{-i} = \theta_i \forall i$

Si indica con

$$M = [2m+1]; [\theta_{-m}, \theta_{-m+1}, \theta_{\mathbf{0}}]$$

Es.:

$$M = [5]; [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \mathbf{\frac{1}{5}}]; M = [5]; [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \mathbf{\frac{3}{9}}]$$

L'insieme delle medie mobili simmetriche è stabile rispetto all'operazione di composizione: date M_1, M_2 simmetriche, $M = M_1 M_2$ è

- centrata
- simmetrica

D'ora in poi consideriamo solo medie mobili simmetriche.

Invarianza rispetto a una media mobile

Una serie $[y_t]_{t=1}^{n}$ è detta invariante rispetto alla media mobile M se

$$My_t = y_t \forall t$$

(si dice anche che M conserva y_t)

Particolarmente importante il comportamento della media mobile rispetto a componenti deterministiche di tipo polinomiale (trend):
Trend costante a: perché una media mobile conservi una costante:

$$Ma = a$$

deve essere

$$\sum_{i=-m}^{m} \theta_i = 1$$

Si dimostra inoltre che una media mobile che conserva le costanti conserva anche i polinomi di grado 1.

Conservazione dei polinomi

In generale, per conservare un polinomio di grado p, una media mobile deve soddisfare le:

$$\sum_{i=-m}^{m} \theta_i = 1$$

$$\sum_{i=-m}^{m} i^r \theta_i = 0, r = 1, \ldots, p$$

Una media mobile M esprimibile come composizione di M_1 ed M_2 che conservano i polinomi di grado p conserva anch'essa tali polinomi. Detto P_1 un polinomio di grado p, è:

$$MP_t = M_1 M_2 P_t = M_1 P_t = P_t$$

Trasformazione di un white noise con una MM

Studiamo l'effetto di una trasformazione indotta da una media mobile sulla componente di disturbo e_t. Consideriamo la media mobile centrata

$$e_t^* = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i e_{t+i}$$

Le e_t^* hanno media nulla per la linearità dell'operatore E:

$$E(e_t^*) = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i E(e_{t+i}) = 0$$

e hanno tutte la stessa varianza

$$\sigma^{*2} = Var[e_t^*] = \sigma^2 \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2$$

Trasformazione di un white noise con una MM - 2

La variabilità della componente di disturbo viene ridotta dalla trasformazione se

$$\sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 < 1$$

In questo caso la media mobile svolge un'azione spianante, riducendo le irregolarità casuali. La quantità

$$\frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2} = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2$$

è detta rapporto di riduzione della varianza residua e misura la capacità della media mobile di ridurre la perturbazione.

Correlazione indotta dalla trasformazione

Le variabili trasformate sono tra loro correlate:

$$Cov(e_t^*, e_{t+h}^* = \sum_{i=-m}^{m} \sum_{j=-m}^{m} \theta_i \theta_j E[e_{t+i} e_{t+h+j}]$$

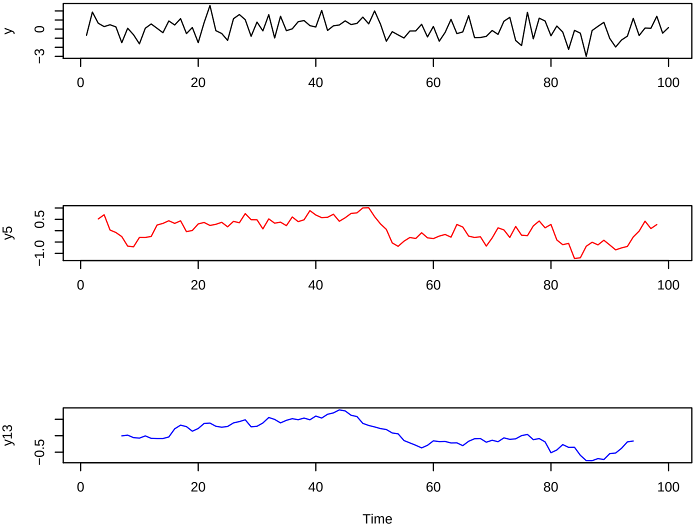
$$= \sigma^2 \sum_{i=h-m}^{m} \theta_i \theta_{i-h}, h < 2m;$$

$$= 0, h \geq 2m$$

L'esistenza di correlazioni non nulle induce un effetto spurio detto effetto di Slutsky-Yule.

La serie e_t^* presenta oscillazioni più o meno regolari che assomigliano a quelle provocate da una componente stagionale e possono disturbare la stima di altre componenti.

Effetto di Slutsky-Yule: esempio



Composizioni di medie mobili semplici

Composizioni di medie mobili possono fornire buone approssimazioni di medie mobili più sofisticate.
Per esempio la composizione di due medie mobili di ordine 4

$$M = [7]; [\frac{1}{16}, [1, 2, 3, \mathbf{4}]$$

(si noti che è centrata, simmetrica ed ha coefficienti di somma 1) può

- conservare trend lineari
- annullare stagionalità di periodo 4

Le medie mobili di Spencer, es.:

$$M_{15} = [15]; [\frac{1}{320}, [-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, \mathbf{74}]$$

annullano componenti stagionali di periodo 4 e 5, e con ampiezza variabile linearmente; inoltre conservano trend polinomiali di grado $p \leq 3$.

La stima delle componenti

La stima delle componenti tramite medie mobili si basa su 3 considerazioni:

- Esistono medie mobili che conservano trend polinomiali fino a un certo ordine
- Una media mobile semplice di ordine S elimina onde di periodo S
- Medie mobili con rapporto di riduzione della varianza minore di 1 riducono la componente accidentale

La stima della componente trend-ciclo

In generale,

- La componente stagionale per definizione si compensa in S periodi
- La componente erratica tende a compensarsi in medie mobili "lunghe"

Pertanto una stima del trend-ciclo si può ottenere

- tramite medie mobili centrate di 5 termini nel caso di dati trimestrali
- tramite mm di 13 termini nel caso di dati mensili
- ...

Bisogna sempre tener presente l'effetto di Slutsky-Yule.

Il trattamento della componente stagionale

Lo studio della stagionalità presenta due problemi:

- stima della componente stagionale (coefficienti)
- sua eliminazione (*destagionalizzazione*)

Il caso della destagionalizzazione è particolarmente importante in pratica:

- variazioni congiunturali "depurate"
- evidenziazione del fenomeno nel lungo termine

La destagionalizzazione non è

- univoca
- neutrale (anche politicamente!)

Il trattamento della componente stagionale - 2

1. Stima dei valori del trend-ciclo y^{**} con medie mobili centrate
2. Stima della componente stagionale secondo
   - modello additivo: $y^d = y_t - y_t^{**}$
   - modello moltiplicativo: $y^d = \frac{y_t}{y_t^{**}}$
3. Destagionalizzazione

Procedura di destagionalizzazione - 1

Consideriamo un modello di stagionalità moltiplicativa su J periodi di N anni, indiciati con T: si calcola

$$\hat{S}e_t = IS_t = \frac{y_t}{y_t^{**}}, t = m+1, \ldots, n-m$$

sono i *rapporti* o *indici di stagionalità*; contegono la componente accidentale;
si verifica l'ipotesi di assenza di stagionalità; se rigettata, si perviene ai *coefficienti grezzi di stagionalità*:

$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{T=1}^{N} IS_{Tj}, j = 1, \ldots, J$$

Procedura di destagionalizzazione - 2

Si impone la condizione di annullamento dei coefficienti stagionali quando aggregati sull'anno: è infatti in generale

$$\prod_{j=1}^{J} \hat{S}_j^* \neq 1$$

si calcolano quindi i coefficienti *ideali*

$$\hat{S}_j = \frac{\hat{S}_j^*}{[\prod_{j=1}^{J} \hat{S}_j^*]^{1/J}}, j = 1, \ldots, J$$

ora è $\prod_{j=1}^{J} \hat{S}_j = 1$ da cui la serie dei dati destagionalizzati:

$$y_{T,j}^d = \frac{y_{T,j}}{\hat{S}_j}$$

L'analisi dei residui

La componente accidentale è stata assunta

- "casuale"
- incorrelata

Verifichiamo se la componente residuale è compatibile con un *white noise*:

- test *parametrici* (basati sulla forma della distribuzione di e_t)
- test non parametrici

Nell'ambito dei test non parametrici,

- test sui *punti di svolta*
- test sul segno delle differenze

Inoltre,

- test sulle autocorrelazioni

L'analisi dei residui - test sui punti di svolta

Definiamo *punto di svolta superiore* per una serie x_t il periodo t:

$$x_{t-1} < x_t, x_t > x_{t+1}$$

e *punto di svolta inferiore* per una serie x_t il periodo t:

$$x_{t-1} > x_t, x_t < x_{t+1}$$

Il test verifica se la frequenza osservata $\hat{p}_n$ dei punti di svolta è compatibile con quella attesa in una serie *white noise*. Si può dimostrare che già per $n \geq 25$ la quantità

$$tp_n = \frac{\hat{p}_n - 2(n-2)/3}{\sqrt{(16n - 29)/90}} \sim N(0, 1)$$

L'analisi dei residui - test sul segno delle differenze

Confrontiamo il numero $\hat{d}_n$ di differenze $x_t - x_{t-1}$ consecutive di segno positivo con quelle attese.
Anche il test

$$td_n = \frac{\hat{d}_n - (n+1)/2}{\sqrt{(n+1)/12}} \sim N(0,1)$$

(tende cioè a distribuirsi come una Normale standardizzata).

Il test sulle autocorrelazioni

I coefficienti di autocorrelazione (campionari) $\hat{\rho}_k$ di un processo *white noise* si distribuiscono, per n sufficientemente grande, come $N(0, 1/n)$ e sono tra loro incorrelati.
Pertanto, l'intervallo di confidenza corrispondente a un certo livello α (es. al 95%) per i $\hat{\rho}_k$ è

$$[-z_\alpha/\sqrt{n}, +z_\alpha/\sqrt{n}]$$

Si ricordi che

- gli z sono dipendenti da n e k
- ma soprattutto che questo è un caso di *test multipli*: non ci sarebbe nulla di strano se alcuni coefficienti, es. 2 su 40, risultassero significativi.