

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI  
A.A. 2018/2019

13 settembre 2019

**nome e cognome:**

**numero di matricola:**

**Note:** Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

### Esercizio 1

Si consideri il seguente **sistema dinamico a tempo continuo** descritto dall'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = c \cdot u(t)$$

$$a = 0.15 \quad b = 0.50 \cdot 10^{-2} \quad c = 0.10$$

### Domanda 1.1

Determinare le equazioni di stato del **sistema discretizzato**, con periodo di campionamento  $\Delta = 2.0$  s

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

## Esercizio 2

Si consideri il seguente **sistema dinamico a tempo discreto** descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \ 1] x(k) \end{cases}$$

### Domanda 2.1

Verificare che il sistema è **asintoticamente stabile**.

### Domanda 2.2

Un sistema LTI a tempo discreto viene detto *contrattivo* se vale che

$$\|x(k)\| \leq \|A\|^k \|x(0)\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \forall x(0) \in X$$

con  $X$  spazio di stato.

Verificare che il sistema definito nell'esercizio 2 **non è** contrattivo. Motivare la risposta.

**Esercizio 3****Domanda 3.1**

Siano  $x$  e  $w$  due variabili aleatorie **incorrelate** entrambe a valor atteso nullo e varianza rispettivamente uguale a  $\sigma_x^2 = 4$ ,  $\sigma_w^2 = 2.5$ . Si supponga di poter osservare le seguenti variabili

$$y_1 = 2x + 3w$$

$$y_2 = 1.5w$$

Mediante la **formula di Bayes**, trovare lo **stimatore lineare ottimo** (cioè quello che minimizza la varianza d'errore) di  $x$  in base all'osservazione di  $y_1$  e di  $y_2$ . Quanto vale la varianza della stima  $\hat{x}$ ?