PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

22 gennaio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 1.1

Si consideri il seguente sistema dinamico **nonlineare a tempo discreto**

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= -\frac{1}{2}x_1(k) + x_1^2(k) + x_2^2(k) \\
x_2(k+1) &= \frac{1}{3}x_2(k) + 2\left(x_1^2(k) + x_2^2(k)\right) \\
y(k) &= 3x_1(k) - 2\,x_2(k)
\end{aligned}
$$

Si analizzi (con un metodo a scelta) la stabilità dello stato di equilibrio

$$[\bar{x}_1\,,\ \bar{x}_2]^T = [0, 0]^T$$

Linearizzo nell'intorno dell'equilibrio

$$A|_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = -\frac{1}{2} + 2\bar{x}_1 = -\frac{1}{2}$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = 2\bar{x}_2 = 0$$

$$A_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 4\bar{x}_1 = 0 \qquad A_{2,2} = \frac{1}{3} + 4\bar{x}_2 = \frac{1}{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ → ha autovalori con modulo < 1

Lo stato di eq è asintoticamente stabile!

Domanda 1.2

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -100\,x(t) + 12\,u(t) \\ y(t) &= 20\,x(t) + 2\,u(t) \end{aligned}$$

Lo si vuole discretizzare per campionamento (con la *tecnica di campionamento e tenuta*), utilizzando il periodo di campionamento

$$T_s = \frac{1}{100}\ \mathrm{s}$$

Determinare le matrici A_d, B_d, C_d e D_d della descrizione a segnali campionati del sistema.

$A_c = -100 \quad B_c = +12 \quad C_c = 20 \quad D_c = 2$

$C_d \equiv C_c \quad D_d \equiv D_c$

$A_d = e^{A_c T_s}$

$B_d = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau$

$= A_c^{-1}\left[e^{A_c T_s} - I\right] \cdot B_c$

Sostituendo

$A_d = e^{-100 T_s} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ //

$B_d = (-100)^{-1}\left[\frac{1}{e} - 1\right] \cdot 12 =$

$= -\frac{1}{\cancel{100}_{25}} \cdot \cancel{12}^{3} \cdot \frac{1-e}{e} = \frac{3}{25} \cdot \frac{e-1}{e}$ //