PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

22 gennaio 2021

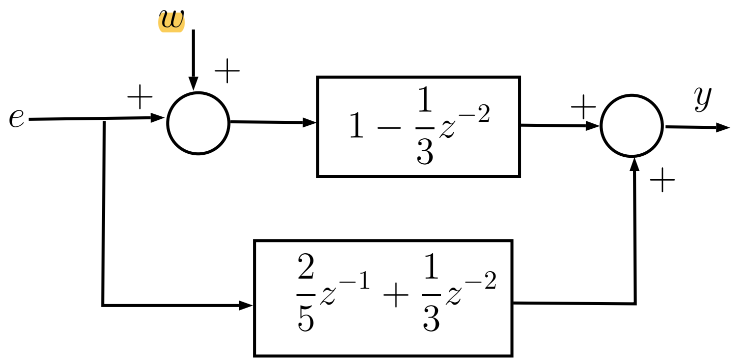
Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 2

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 2.1

Si consideri il processo stocastico stazionario descritto nella figura seguente



dove e è un processo stocastico di rumore bianco

$$e(\cdot) \sim \text{WN}(0,\,1)$$

mentre w è ingresso deterministico

$$w = 3$$

Determinare:

- una rappresentazione in forma canonica per il processo stocastico di y
- valore atteso $\bar{y}$ e varianza σ_y^2 di $y(t)$
- il **predittore ottimo** a k passi dell'uscita $\hat{y}(t+k|t)$ **a partire dal rumore** per $k = 1,\ 2$ e l'errore di predizione, commentando i risultati ottenuti
- per $k = 1$ il **predittore ottimo** $\hat{y}(t+1|t)$ **a partire dai dati**

Equazione alle differenze del processo di y

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{3} z^{-2}\right] w(t) + \left[1 - \cancel{\frac{1}{3} z^{-2}} + \frac{2}{5} z^{-1} + \cancel{\frac{1}{3} z^{-2}}\right] e(t)$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-2}\right) w(t)}_{B(z)} + \boxed{\underbrace{\left(1 + \frac{2}{5} z^{-1}\right) e(t)}_{C(z)}}$$

parte deterministica

processo MA(1)

C(z) ha radici $|\cdot| < 1$ $\longrightarrow$ $y(t)$ è in forma canonica!

$\bar{y} = E(y) = ?$ $\quad \sigma_y^2 = ?$

$w \sim WN(0,1)$

MA(1)

$$y(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-2}\right) w(t)}_{\text{deterministica}} + \underbrace{\left(1 + \frac{2}{5} z^{-1}\right) e(t)}_{\text{rumore}}$$

$$\boxed{\bar{y} = E(y) = \left(1 - \frac{1}{3}\cdot 1\right)\cdot 3 + 0 = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2}$$

$B(1)\cdot \bar{w}$

la parte deterministica non contribuisce

$$\sigma_y^2 = 0 + \sigma^2_{MA} = \left(1 + \frac{4}{25}\right)\cdot 1 = \frac{29}{25}$$

predittore alimentato da rumore

$$y(t) = \boxed{+2} + C(z)e(t)$$

noto come c'è

ottimizzo il predittore di questo

$$\boxed{y_e(t) = C(z)e(t)}$$

$C(z) = 1 + \frac{2}{5} z^{-1}$

$A(z) = 1$

voglio $\hat{y}_e(t+1|t)$ e $\hat{y}_e(t+2|t)$ $\Longrightarrow$

$$
\begin{array}{l|l}
1+\frac{2}{5}z^{-1} & 1 \\
\hline
-1 & 1+\frac{2}{5}z^{-1} \\
\hline
\frac{2}{5}z^{-1} & \\
-\frac{2}{5}z^{-1} & \\
\hline
\emptyset &
\end{array}
$$

$$\hat{W}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = E(z) + z^{-k}\underbrace{\hat{W}_r(z)}_{}$$

predittore ad n passi !

$\boxed{k=1}$

$$\hat{W}(z) = \underset{E(z)}{1} + z^{-1}\cdot\frac{2}{5} \leftarrow \hat{W}_r(z)$$

$$\boxed{\hat{y}_e(t+1|t) = \frac{2}{5}e(t)}$$

$$\boxed{\hat{y}(t+1|t) = +\frac{2}{5}e(t)+2}$$

il valore atteso di y

$\boxed{k=2}$

$$\hat{W}(t) = \boxed{\underbrace{\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)}_{E(z)}} + z^{-2}\cdot \phi$$

$\hat{W}_2(t)$

$$\hat{y}_e(t+2|t) = \phi$$ ← ovvio è MA(1) !!

$$\hat{y}(t+2|t) = \phi + 2$$ ← il valore atteso di y

predittore ottimo dei dati

predittore del filtro sbiancante

$$\boxed{\hat{W}_1(t)\cdot\frac{1}{C(z)} = \frac{2/5}{1+\frac{2}{5}z^{-1}}}$$

$$\boxed{y(t) = \left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)e(t) + \bar{y}}$$

$$\boxed{y_e(t) \triangleq y(t) - \bar{y}}$$

$$y_e(t) = \underbrace{\left(1+\frac{2}{5}z^{-1}\right)}_{C(z)}e(t)$$

quindi il predittore è
$$\boxed{\hat{y}_e(t+1|t) = \frac{2/5}{1+\frac{2}{5}z^{-1}}\,y_e(t)}$$

Dato che $y_e(t)$ differisce da $y(t)$ solo per la costante $\bar{y}$ (che è grandezza deterministica) allora probabile anche per il predittore ⟹

$$\hat{y}_e(t+1|t) = \frac{2/5}{1+\frac{2}{5}z^{-1}}\, y_e(t)$$

$$\boxed{\hat{y}_e(t+1|t) = -\frac{2}{5}\hat{y}_e(t|t-1) + \frac{2}{5} y_e(t)}$$

$$y(t) = y_e(t) + \bar{y} \Rightarrow \hat{y}(t+1|t) = \hat{y}_e(t+1|t) + \bar{y}$$

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{2}{5}\left\{\hat{y}(t|t-1) - \bar{y}\right\} + \frac{2}{5}\left[y(t) - \bar{y}\right] + \bar{y}$$

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{2}{5}\hat{y}(t|t-1) + \cancel{\frac{2}{5}\bar{y}} + \frac{2}{5}y(t) - \cancel{\frac{2}{5}\bar{y}} + \bar{y}$$

$$\boxed{\hat{y}(t+1|t) = -\frac{2}{5}\hat{y}(t|t-1) + \frac{2}{5}y(t) + \bar{y}}$$

Domanda 2.2

Data la variabile aleatoria gaussiana x con valore atteso nullo e varianza $\sigma_x^2 = 4$, si possono osservare le **due** seguenti altre **variabili aleatorie**, ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} d_1 = 2.5\,x + 3 \\ d_2 = 4\,x \end{cases}$$

Mediante la formula di Bayes, trovare lo stimatore ottimo (cioè quello che minimizza la varianza d'errore) di x in base all'osservazione congiunta di d_1 e d_2.
Quanto vale la varianza della stima $\hat{x}$?

Analisi $\rightarrow$ d_1 è v.a. gaussiana $d_1 \sim \mathcal{G}(3, \underbrace{4 \cdot 2.5^2}_{25})$

d_2 è $\sim \mathcal{G}(0, 64)$ $\qquad d_\mu = E(d) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad \theta = [x] \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{dd} & \Lambda_{d\theta} \\ \Lambda_{\theta d} & \lambda_{\theta\theta} \end{bmatrix}$

$(d - d_\mu) = \begin{bmatrix} d_1 - \bar{d}_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{d}_1 = d_1 - \bar{d}_1 \qquad \lambda_{\theta\theta} = 4$

$$\boxed{\Lambda_{d\theta} = \begin{bmatrix} E(\tilde{d}_1 x) \\ E(d_2 x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5\,E(x^2) \\ 4\,E(x^2) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2.5 \cdot 4 \\ 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$E(x^2) = \sigma_x^2 = 4$

$E(x) = 0$

$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} \lambda_{\tilde{d}_1\tilde{d}_1} & \lambda_{\tilde{d}_1 d_2} \\ \lambda_{d_2 \tilde{d}_1} & \lambda_{d_2 d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & \tilde{\lambda} \\ \tilde{\lambda} & 64 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\lambda} = E\left[(d_1 - \bar{d}_1) d_2\right]$

In definitiva $\Lambda = \begin{bmatrix} 25 & \tilde{\lambda} & 10 \\ \tilde{\lambda} & 64 & 16 \\ 10 & 16 & 4 \end{bmatrix}$

$\Lambda_{\theta d}$

$\tilde{d} = E\left[(d_1 - \bar{d}_1) d_3\right]$ $\quad \begin{cases} d_1 - \bar{d}_1 = (2{,}5x + 3) - 3 \\ d_2 = 4x \end{cases}$

$$E\left\{(2.5x)(4x)\right\} = E\left\{10x^2\right\} = 10\,E\left\{x^2\right\} = 40$$

$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$ $\quad \left.\begin{matrix} \sigma_x^2 = 4 \\ E(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(x^2) = 4$

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 25 & 40 \\ 40 & 64 \end{bmatrix}$$

quindi $\Lambda = \left[\begin{array}{cc|c} 25 & 40 & 10 \\ 40 & 64 & 16 \\ \hline 10 & 16 & 4 \end{array}\right]$

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 25 & 40 \\ 40 & 64 \end{bmatrix}$$

$\det \Lambda_{dd} = 25 \cdot 64 - 40^2$
$= 1600 - 1600 = 0$

Significa che le variabili $\tilde{d}_1$ e d_2 sono LINEARMENTE DIPENDENTI!

In effetti $1{,}6\,\tilde{d}_1 = d_2$!!

In effetti:

$$1{,}6\,\tilde{d}_1 = d_2 \;!!$$

Allora devo utilizzare solo $\tilde{d}_1$ oppure solo d_2 !!

Se utilizzassi solo d_2:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{d_2 d_2} & \lambda_{d_2 \vartheta} \\ \lambda_{\vartheta d_2} & \lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 16 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\vartheta d_2} = E[x \cdot 4x] = 4E(x^2) = 4 \cdot 4$$

Lo stimatore ottimo allora vale:

$$\hat{\vartheta} = \lambda_{\vartheta d_2} \cdot \lambda_{d_2 d_2}^{-1} \cdot d_2$$

$$\hat{\vartheta} = 16 \cdot \frac{1}{64} d_2 = \frac{1}{4} d_2$$

bisognava aspettarselo $[d_2 = 4x]$

E se invece volessi utilizzare SOLO d_1?

$$\hat{\vartheta} = \vartheta_m + \Lambda_{\vartheta d_1} \Lambda_{d_1 d_1}^{-1} \left[d_1 - d_{1m} \right]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{d_1 d_1} & \Lambda_{d_1 \vartheta} \\ \Lambda_{\vartheta d_1} & \Lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\vartheta} = 10 \cdot \frac{1}{25}(d_1 - 3) = \frac{2}{5}(d_1 - 3)$$

Quanto vale la varianza della stima nei 2 casi?

In generale $var(\vartheta - \hat{\vartheta}) = \Lambda_{\vartheta\vartheta} - \Lambda_{\vartheta d} \Lambda_{dd}^{-1} \Lambda_{d\vartheta}$

Stavolta sono matrici 1x1 in entrambi i casi

$\boxed{1° \text{ caso: uso } d_2}$

$$var(\vartheta - \hat{\vartheta}) = \Lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\Lambda_{\vartheta d_2}^2}{\Lambda_{d_2 d_2}}$$

$$= 4 - \frac{256}{64} = 0$$

Ovvio!

$d_2 = 4x$!!

$\boxed{2° \text{ caso: uso } d_1}$

$$var(\theta - \hat{\theta}) = I_{\theta\theta} - \frac{I^2_{\theta d_1}}{I_{d_1 d_1}}$$

$$= 4 - \frac{10^2}{25} = 0$$

Ovvio anche stavolta!

$d_1 = 2,5x + 3$