PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

22 gennaio 2021

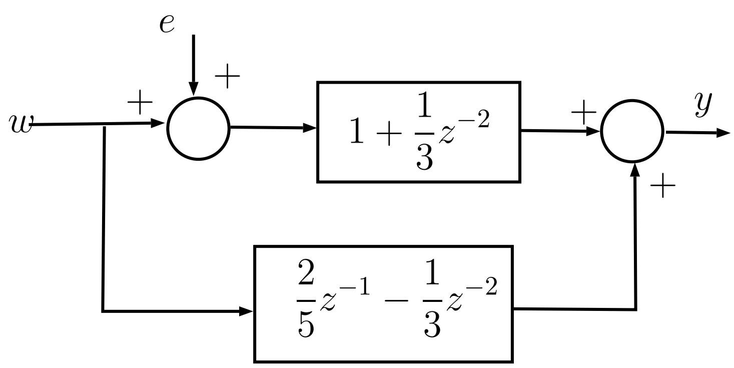
Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo B
esercizio:	Esercizio 2

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 2.1

Si consideri il processo stocastico stazionario descritto nella figura seguente



dove e è un processo stocastico di rumore bianco

$$e(\cdot) \sim \mathrm{WN}\,(0,\,1)$$

mentre w è ingresso deterministico

$$w = 3$$

Determinare:

- una rappresentazione in forma canonica per il processo stocastico di y
- valore atteso $\bar{y}$ e varianza σ_y^2 di $y(t)$
- il **predittore ottimo** a k passi dell'uscita $\hat{y}\,(t+k|t)$ **a partire dal rumore** per $k = 1,\ 2$ e l'errore di predizione, commentando i risultati ottenuti
- per $k = 1$ il **predittore ottimo** $\hat{y}\,(t+1|t)$ **a partire dai dati**

$$y(t) = \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{3}z^{-2}\right)e(t)}_{\text{parte MA(2)}} + \underbrace{\left(1 + \tfrac{2}{5}z^{-1}\right)w(t)}_{\text{parte deterministica}}$$

è forma canonica

$$\bar{y} = \emptyset + \left(1 + \tfrac{2}{5}\right)\cdot 3 = \tfrac{21}{5}$$

$$\sigma_y^2 = \left(1 + \tfrac{1}{9}\right)\cdot 1 = \tfrac{10}{9}$$ ← la parte deterministica non contribuisce!

$\boxed{\text{predittore ottimo } k = 1,2}$

$$y(t) = \underbrace{C(z)\,e(t)} + \underbrace{B(z)\,w(t)} \rightarrow \text{vale } \bar{y}$$

fa il predittore ascolitto questa parte

Traslo la variabile: $y_c(t) \triangleq y(t) - \bar{y}$

$$y_c(t) = \boxed{\left(1 + \frac{1}{3} z^{-2}\right) e(t)} \qquad e \in WN(0,1)$$

NB deve essere polinomio COMPLETO

$$1 + 0\cdot z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2} \;\Big|\; 1$$

$$-1 \qquad\qquad 1 + 0\cdot z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}$$

$$\cancel{\;}\; 0\cdot z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}$$

$$-0\cdot z^{-1}$$

$$\cancel{\;} + \frac{1}{3} z^{-2}$$

$$\hat{W}(t) = 1 + z^{-1}\cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3} z^{-1}\right]}_{\hat{W}_1(z)}$$

$$\hat{W}(t) = 1 + \boxed{z^{-2}\cdot\left[\frac{1}{3}\right] \; \hat{W}_2(t)}$$

quindi:

$$\boxed{\hat{y}_c(t+1|t) = +\frac{1}{3} e(t-1)} \Rightarrow \hat{y}(t+1|t) = \frac{1}{3} e(t-1) + \bar{y}$$

$$\hat{y}_c(t+2|t) = +\frac{1}{3} e(t) \Rightarrow \hat{y}(t+2|t) = \frac{1}{3} e(t) + \bar{y}$$

per il predittore ottimo dei dati

$$\hat{y}_c(t+1|t) = \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-2}} y_c(t)$$

$$\boxed{\hat{y}_c(t+1|t) = -\frac{1}{3}\hat{y}_c(t-1|t-2) + \frac{1}{3}y_c(t-1)}$$

Dato che $y_c(t)$ differisce da $y(t)$ solo per la costante $\bar{y}$ (che è deterministica) allora vale che:

$$y(t) = y_c(t) + \bar{y} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\hat{y}(t+1|t) = \hat{y}_c(t+1|t) + \bar{y}}$$

cioè:

$$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{3}\left[\hat{y}(t-1|t-2) - \bar{y}\right] + \frac{1}{3}\left[y(t-1) - \bar{y}\right] + \bar{y}$$

$$= -\frac{1}{3}\hat{y}(t-1|t-2) + \cancel{\frac{1}{3}\bar{y}} + \frac{1}{3}y(t-1) - \cancel{\frac{1}{3}\bar{y}} + \bar{y}$$

$$\boxed{\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{3}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{1}{3}y(t-1) + \bar{y}}$$

Domanda 2.2

Data la variabile aleatoria gaussiana x con valore atteso nullo e varianza $\sigma_x^2 = 2$, si possono osservare le **due** seguenti altre **variabili aleatorie**, ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} d_1 = 5\,x - 2 \\ d_2 = 12\,x \end{cases}$$

Mediante la formula di Bayes, trovare lo stimatore ottimo (cioè quello che minimizza la varianza d'errore) di x in base all'osservazione congiunta di d_1 e d_2.
Quanto vale la varianza della stima $\hat{x}$?

$$d_1 \sim \mathcal{G}(-2, 50) \qquad d_2 \sim \mathcal{G}(0, 288)$$

$$\vartheta = [x]$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 - d_{1,m} \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{dd} & \Lambda_{d\vartheta} \\ \Lambda_{\vartheta d} & \Lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 50 & ? \\ ? & 288 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{\vartheta\vartheta} = 2$$

$$\Lambda_{d\vartheta} = \begin{bmatrix} E[(d_1+2)\cdot x] \\ E(d_2\, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(5x^2) \\ E(12x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 2 \\ 12\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc|c} 50 & \tilde{\lambda} & 10 \\ \tilde{\lambda} & 288 & 24 \\ \hline \underbrace{10 \quad 24}_{\Lambda_{\vartheta d}} & & 2 \end{array}\right]$$

$$\lambda = E\left[(d_1 - d_{1,M}) \cdot d_2\right] = E\left[5x \cdot 12x\right]$$

$$E(x^2) = \sigma_x^2 = 2 \Rightarrow \quad = 60\, E(x^2) = 120$$

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 50 & 120 \\ 120 & 288 \end{bmatrix}$$

$$|\Lambda_{dd}| = 0 \Leftarrow$$ d_1 e d_2 sono linearmente dipendenti!

NON posso usarle entrambe! DEVO utilizzarne solo una!

$\boxed{1^\circ \text{ caso: uso solo } d_2}$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{d_2 d_2} & \lambda_{d_2 \theta} \\ \lambda_{\theta d_2} & \lambda_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 288 & 24 \\ 24 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\theta d_2} = E\left[x \cdot 12x\right] = 12\, E(x^2) = 24$$

Lo stimatore ottimo vale:

$$\hat{\theta} = \lambda_{\theta d_2} \cdot \lambda_{d_2 d_2}^{-1} \cdot d_2 \Rightarrow$$

$$\hat{\vartheta} = \lambda_{\vartheta d_2} \cdot \lambda_{d_2 d_2}^{-1} \cdot d_2$$

$$\hat{\vartheta} = 24 \cdot \frac{1}{288} d_2 = \frac{1}{12} d_2 \quad !!$$

Ovvio! $d_2 = 12X$

È la varianza della stima?

$$var(\vartheta - \hat{\vartheta}) = \lambda_{\vartheta\vartheta} - \lambda_{\vartheta d_2}^2 \cdot \frac{1}{\lambda_{d_2 d_2}}$$

$$= 2 - 24^2 \frac{1}{288} = 2 - \frac{\cancel{576}^{\,2}}{\cancel{288}_{\,1}} = 0$$

$\boxed{\text{2° caso: utilizzo solo } d_1}$

$$\hat{\vartheta} = \lambda_{\vartheta d_1} \cdot \lambda_{d_1 d_1}^{-1} (d_1 - d_{1m})$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{d_1 d_1} & \lambda_{d_1 \vartheta} \\ \lambda_{\vartheta d_1} & \lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\vartheta d_1} = E\left[x(5x-2+2)\right] = 5E(x^2) = 10$$

$$\hat{\theta} = 10 \cdot \frac{1}{50}(d_1 + 2) = \frac{1}{5}(d_1 + 2)$$

Per la varianza della stima

$$var(\theta - \hat{\theta}) = \lambda_{\theta\theta} - \frac{\lambda^2_{\theta d_1}}{\lambda_{d_1 d_1}} = 2 - \frac{10^2}{50} = 0$$

Come nell'altro caso bisognava aspettarselo! C'è legame lineare <u>ESATTO</u> tra d_1 e la v.a. x !!