PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

26 febbraio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 2

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 2.1

Dato il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= +x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{cases}$$

si chiede di determinare:

a) • le espressioni dei modi di risposta dell'evoluzione libera dello stato, a partire da uno stato iniziale generico $\bar{x}(0) = [\bar{x}_1(0)\ \bar{x}_2(0)]^T$.

b) • l'evoluzione libera dello stato del sistema a partire dallo stato iniziale $\bar{x}(0) = [+1\,,\ -1]^T$.

Matrice A $\rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$ risposta a

polinomio caratteristico ed autovalori

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \left(+1 \pm j\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \lambda_1 = +\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\rightarrow \lambda_2 = +\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

2 autovalori distinti, con modulo 1

Dato due sono autovalori distinti, posso utilizzare la formula di L2-p22

$$A^k = \sum_{1}^{2}{}_i \; A_i \, \lambda_i^2 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = +\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = +\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

con
$$A_i = \lim_{z \to \lambda_i} \left[(z - \lambda_i)(zI - A)^{-1} \right]$$

oppure far uso dell'espressione in L2-p23

$$A_i = v_i \tilde{v}_i^T$$

$v_i \to$ autovettore destro associato a λ_i

$\tilde{v}_i^T \to$ autovettore sinistro associato a λ_i

Utilizzerò il 1° approccio [utilizzare l'altro approccio come alternativa e confrontare la complessità e numerosità dei calcoli]

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ +1 & z-1 \end{bmatrix} \qquad \det(zI - A) = z^2 - z + 1$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 - z + 1} \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ +1 & z \end{bmatrix}^T = \longrightarrow$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 - z + 1}\begin{bmatrix} z-1 & +1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Allora:

$$A_1 = \lim_{z \to \lambda_1} \cancel{(z-\lambda_1)} \frac{1}{\cancel{(z-\lambda_1)}(z-\lambda_2)}\begin{bmatrix} z-1 & +1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)}\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & +1 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-j\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & +1 \\ -1 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= j\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & +1 \\ -1 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} & j\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -j\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} = A_1$$

$$A_2 = \lim_{z \to \lambda_2} \cancel{(z-\lambda_2)} \frac{1}{(z-\lambda_1)\cancel{(z-\lambda_2)}} \begin{bmatrix} z-1 & +1 \\ -1 & z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & +1 \\ -1 & \lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & +1 \\ -1 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -j\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & +1 \\ -1 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} & -j\frac{\sqrt{3}}{3} \\ +j\frac{\sqrt{3}}{3} & +\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} = A_2$$

Considerato lo stato iniziale generico

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

allora si può scrivere $\longrightarrow$

Evoluzione libera dello stato

$$x_{\text{free}}(k) = A^k \bar{x}(0)$$

ma $$A^k = A_1(\lambda_1)^k + A_2(\lambda_2)^k$$

quindi:

$$x(k) = A_1\begin{bmatrix}\bar{x}_1(0)\\ \bar{x}_2(0)\end{bmatrix}(\lambda_1)^k + A_2\begin{bmatrix}\bar{x}_1(0)\\ \bar{x}_2(0)\end{bmatrix}(\lambda_2)^k$$

Sostituendo:

$$A_1\begin{bmatrix}\bar{x}_1(0)\\ \bar{x}_2(0)\end{bmatrix}(\lambda_1)^k =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} & j\frac{\sqrt{3}}{3}\\ -j\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1(0)\\ \bar{x}_2(0)\end{bmatrix}(\lambda_1)^k =$$

$$= \begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_1(0) + j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_2(0)\\ -j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_1(0) + \left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_2(0)\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

$$A_2 \begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{bmatrix} (\lambda_2)^k =$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} & -j\frac{\sqrt{3}}{3} \\ +j\frac{\sqrt{3}}{3} & +\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{bmatrix} (\lambda_2)^k =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_1(0) - j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_2(0) \\ j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_1(0) + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_2(0) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

In definitiva:

$$x_{free}(k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_1(0) + j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_2(0) \\ -j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_1(0) + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_2(0) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_1(0) - j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_2(0) \\ j\frac{\sqrt{3}}{3}\bar{x}_1(0) + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\bar{x}_2(0) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

risposta (b) Sfrutto l'ultimo risultato precedente

$$x(0) = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e sostituisco:

$$x_{free}(k) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot(+1) + j\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-1) \\ -j\frac{\sqrt{3}}{3}(+1) + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot(-1) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)(+1) - j\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-1) \\ j\frac{\sqrt{3}}{3}(+1) + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot(-1) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

Domanda 2.2

Si vuole discretizzare per campionamento (con la tecnica di campionamento e tenuta) il sistema lineare a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$\ddot{y}(t) - 2\,\dot{y}(t) + 12\,y(t) = -4\,u(t)$$

Determinare le matrici delle equazioni di stato del sistema discretizzato, utilizzando il valore $T_s = 0.1\ s$ per il periodo di campionamento.

Da equazione differenziale ad equazioni di stato :

$$y(t) \triangleq x_1(t)$$
$$\dot{y}(t) \triangleq x_2(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -12x_1(t) + 2x_2(t) - 4u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Matrici delle equazioni di stato

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & +2 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Campionamento:
(L1 - p125
L1 - p126)

$$A_d = e^{A_c \Delta}$$

$$B_d = \int_0^{\Delta} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau$$

Δ periodo di campionamento

$$C_d \equiv C_c \qquad D_d \equiv D_c$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & +2 \end{bmatrix} \longrightarrow (sI - A_c) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_c) = s(s-2) + 12 = s^2 - 2s + 12$$

$$(sI - A_c)^{-1} = \frac{1}{s^2 - 2s + 12} \begin{bmatrix} s-2 & -12 \\ +1 & s \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-2s+12} & \frac{1}{s^2-2s+12} \\ -\frac{12}{s^2-2s+12} & \frac{s}{s^2-2s+12} \end{bmatrix}$$

A questo punto $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} \Longrightarrow$

$$\left[e^{A_c t}\right]_{(1,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2-2s+12}\right\}$$

$$s^2-2s+1+11$$

$$(s-1)^2+(\sqrt{11})^2$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-1)^2+(\sqrt{11})^2}\right\} = \longrightarrow \circledast$$

Ricordando che

$$\mathcal{L}\left\{e^{\sigma t}\cos(\omega t)\cdot 1(t)\right\} = \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{\sigma t}\operatorname{sen}(\omega t)\cdot 1(t)\right\} = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$$\circledast \longrightarrow = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+(\sqrt{11})^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{11})^2}\right\}$$

$$= e^{t}\cos(\sqrt{11}\,t)\cdot 1(t) - \frac{\sqrt{11}}{11}e^{t}\operatorname{sen}(\sqrt{11}\,t)\cdot 1(t)$$

$$= e^{t}\left[\cos(\sqrt{11}\,t) - \frac{\sqrt{11}}{11}\operatorname{sen}(\sqrt{11}\,t)\right]\cdot 1(t)$$

Analogamente

$$\left[e^{A_c t}\right]_{(1,2)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{11})^2}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{11} e^{t} \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{11}\,t) \cdot 1(t)$$

$$\left[e^{A_c t}\right]_{(2,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-12}{(s-1)^2+(\sqrt{11})^2}\right\} =$$

$$= -12\,\frac{\sqrt{11}}{11}\, e^{t} \operatorname{sen}(\sqrt{11}\,t) \cdot 1(t)$$

$$(s-1+1)$$

$$\left[e^{A_c t}\right]_{(2,2)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+(\sqrt{11})^2}\right\} =$$

$$= e^{t}\cos(\sqrt{11}\,t)\cdot 1(t) + \frac{\sqrt{11}}{11}\, e^{t} \operatorname{sen}(\sqrt{11}\,t)\cdot 1(t)$$

$$= e^{t}\left[\cos(\sqrt{11}\,t)\cdot 1(t) + \frac{\sqrt{11}}{11}\operatorname{sen}(\sqrt{11}\,t)\cdot 1(t)\right]$$

A questo punto:

$$A_d = e^{A_c T_s} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{0,1}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{10}\right) - \frac{\sqrt{11}}{11}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{10}\right)\right] & \frac{\sqrt{11}}{11} e^{\frac{1}{10}}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{10}\right) \\ -\frac{12\sqrt{11}}{11} e^{\frac{1}{10}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{10}\right) & e^{\frac{1}{10}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{10}\right) + \frac{\sqrt{11}}{11} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{10}\right)\right] \end{bmatrix}$$

Numericamente:

$$A_d \simeq \begin{bmatrix} 0,9364 & 0,1085 \\ -1,302 & 1,153 \end{bmatrix}$$

$$C_d = C_c \qquad D_d = D_c$$

A_c è invertibile posso usare questa formula!

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau = A_c^{-1}\left(e^{A_c T_s} - I\right)\cdot B_c =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,0212 \\ -0,4340 \end{bmatrix}$$