

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

26 febbraio 2021

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo B

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1.1

Si consideri il modello di **regressione lineare**

$$\mathcal{M}_1 : y(t) = a + bt + \epsilon(t)$$

Noti i campioni raggruppati nella tabella seguente:

t_i	1	2	3	4	5
$y(t_i)$	-2.5186	-0.2554	3.1489	11.8478	13.2625

Si chiede di:



1. determinare la stima ai minimi quadrati dei parametri del modello sfruttando i dati a disposizione;



2. si supponga di voler stimare il parametro a con

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \quad N: \text{numero dei campioni}$$

Analizzare lo stimatore: è stimatore polarizzato oppure non polarizzato? Motivare la risposta.

- Suggestione: vale che

$$\sum_{t=1}^N t = \frac{N(N+1)}{2}$$



3. Si vuole ora stimare il parametro b , con la stima ai minimi quadrati, facendo uso del modello

$$\mathcal{M}_2 \quad y(t) - \hat{a} = z(t) = bt + \epsilon(t)$$

Confrontare la stima ottenuta per il parametro b con quella ottenuta al punto 1. Commentare il risultato alla luce dell'analisi svolta al punto 2.

Es 1 Dati i campioni

t	1	2	3	4	5
y	-2,578	-0,2539	3,1489	11,848	13,2615

Gruppo B

Si consideri il modello di regressione lineare

$$M_1 \quad y(t) = a + bt + \varepsilon(t)$$

con $\varepsilon(\cdot) \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

(a) Determinare la stima ai minimi quadrati dei parametri a, b utilizzando i dati a disposizione.

(b) Si consideri la quantità $S_0 = \sum_{t=1}^5 y(t)$
e si supponga di stimare il parametro a con $\hat{a} = \frac{1}{5} S_0$

Soluzioni

(a) regressione lineare

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix}}_{\phi^T(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta} + \varepsilon(t)$$

Scrivo le equazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix}$$

moltiplico a sx
entrambi \rightarrow
per Φ

$$\Phi^T \theta = Y$$

$$\Phi \Phi^T \theta = \Phi Y$$

è matrice
quadrata

se invertibile \rightarrow

$$\hat{\theta} = (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi Y$$

Minim:

$$\hat{\Theta} = (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi Y$$

$$\Phi \Phi^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 & 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y(1) + y(2) + y(3) + y(4) + y(5) \\ y(1) + 2y(2) + 3y(3) + 4y(4) + 5y(5) \end{bmatrix}$$

eq. normali ai minimi quadrati (L8-p6)

$$\left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right] \sigma = \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t)$$

con $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$

$$\Phi \Phi^T$$

$$\Phi y$$

$$\Phi \Phi^T = \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} 1^2 & 1 \cdot t \\ 1 \cdot t & t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\sum_{t=1}^N 1^2 \right) & \left(\sum_{t=1}^N t \right) \\ \left(\sum_{t=1}^N t \right) & \left(\sum_{t=1}^N t^2 \right) \end{bmatrix} =$$

$$\Phi \Phi^T = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\sum_{t=1}^N 1^2 \right) & \left(\sum_{t=1}^N t \right) \\ \left(\sum_{t=1}^N t \right) & \left(\sum_{t=1}^N t^2 \right) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{t=1}^N 1 = N$$

$$\sum_{t=1}^N t = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{t=1}^N t^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

(fr. Analisi
Matematica)

Sostituendo i valori si trova:

$$\left[\sum_{t=1}^5 \varphi(t) \varphi^T(t) \right] = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} = \mathcal{J}$$

$$\left[\sum_{t=1}^5 \varphi(t) \cdot y(t) \right] = \begin{bmatrix} 25,4852 \\ 120,1210 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^0 = -9,1230$$

$$\hat{\theta} = S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 25,4852 \\ 120,1210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,90758 \\ 4,36654 \end{bmatrix}$$

$$b^0 = +4,5670$$

кислота (a)

misjola (b)

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)$$

$$y(t) = a + bt + \varepsilon(t)$$

quindi:

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (a + bt + \varepsilon(t))$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N a + \frac{1}{N} b \sum_{t=1}^N t + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)$$

$$= a + \frac{b}{N} \sum_{t=1}^N t + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)$$

$\frac{N(N+1)}{2}$

$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} E[\varepsilon]$

$$E[\hat{a}] = a + \frac{b(N+1)}{2} + 0$$

$\rightarrow +10!!!$

ε "palestrato"

misjola (c)

$$\hat{a} = \frac{1}{5} \sum_{t=1}^5 y(t) = 5,0970$$

$$a^0 = -9,1230$$

$$z(t) = y(t) - \hat{a} =$$

-7,6156	-5,3524	-1,8481	6,7508	8,1655
1	2	3	4	5

$$\left[\sum_{t=1}^5 \varphi(t) \varphi^T(t) \right] = \left[\sum_{t=1}^5 t^2 \right] = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = 55$$

$$\left[\sum_{t=1}^5 \varphi(t) \cdot z(t) \right] = 43,6659$$

da cui $\hat{b} = \frac{1}{55} (43,6659) \approx 0,7939$

Ohvio! Lo stimatore \hat{a} è povero! Il risultato trovato è una stima fortemente inaccurata di b !

La stima di $\hat{\alpha}$ è plausibile oppure no?

Suggerimento:

vale che $\sum_{t=1}^N t = \frac{N(N+1)}{2}$

$$y(t) = a + bt + \varepsilon(t) \rightarrow S_0 = \sum_{t=1}^N y(t)$$
$$= Na + b \sum_{t=1}^N t + \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{N} S_0 = a + \frac{1}{N} b \left(\sum_{t=1}^N t \right) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

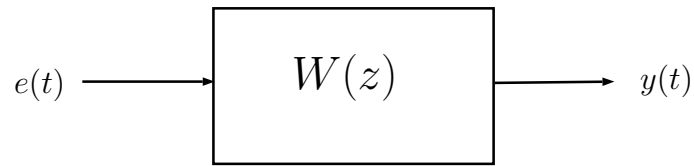
$\downarrow N \rightarrow \infty$
Termine divergente!

$$\begin{matrix} N \rightarrow \infty \\ \downarrow \\ E[\varepsilon] = 0 \end{matrix}$$

$\frac{1}{N} S_0$ è stima non consistente (il bias divergente al crescere di N !)

Domanda 1.2

Si consideri il processo stocastico stazionario $y(\cdot)$, generato dal sistema



dove

$$W(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{5}z^{-1}\right)} \quad e(\cdot) \sim \text{WN}(0, 1)$$

SI chiede di:

- ricavare il predittore ottimo ad 1 passo di $y(t)$, basato sulle misure $y(t-1)$, $y(t-2)$, ...
- calcolare la varianza dell'errore di predizione associato al predittore determinato al punto precedente;
- facendo ancora riferimento al medesimo processo stocastico, si supponga ora che il rumore bianco $e(\cdot)$ sia **misurabile**. Determinare allora il predittore ottimo ad 1 passo basato sulle misure $e(t-1)$, $e(t-2)$, ... e calcolare la varianza del relativo errore di predizione.

Soluzione

$$W(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

è un zero
deco in
 $z_1 = -3!$

zeri e poli: zeri

$$z_1 = -3$$

$$z_2 = 0$$

poli $P_1 = +\frac{1}{3}$

$$P_2 = -\frac{1}{5}$$

NON è in forma canonica
a causa di z_1 ($|z_1| > 1!$)

$$|P_2| < 1 \text{ ok}$$

Per determinare il predittore ottimo ad 1 passo
è necessario che la FdI sia fattore spettrale
canonico (cfr. L10-p17).

Per determinare il fattore spettrale canonico
 $\hat{W}(z)$ allora utilizzo il filtro parrotutto

$$T(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + 3z^{-1}}$$

e così ottengo:

$$\hat{W}(z) = T(z)W(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

che ora è fattore spettrale canonico!

Verifica: $\hat{W}(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$

$\frac{z^2}{z^2}$ ✓ lo
 dividiamo
 in parte
 frazionaria
 di z

$= \frac{z\left(z + \frac{1}{3}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z + \frac{1}{5}\right)} = \frac{N(z)}{D(z)}$

- $N(z)$, $D(z)$ polinomi di 2° grado ✓
(stesso grado)
- coeff. di grado max pari ad 1 (polinomi
monici) ✓
- zeri e poli a modulo minore di 1 ✓

$\hat{W}(z)$ è fattore spettrale canonico

Affinché l'uscita di $\hat{W}(z)$ sia un processo stocastico col medesimo spettro del processo stocastico d'ingresso $y(\cdot)$ deve accadere che:

$$\phi_y(z) = W(z) \cdot W(z^{-1}) \cdot 1 = \hat{W}(z) \cdot \hat{W}(z^{-1}) \cdot 1$$

~~$$W(z) \cdot W(z^{-1}) = W(z) \cdot T(z) \cdot W(z^{-1}) \cdot T(z^{-1}) \cdot 1$$~~

$$T(z) \cdot T(z^{-1}) d_y^2 = 1 \quad \text{con } T(z) = \frac{z + 1/3}{z + 3}$$

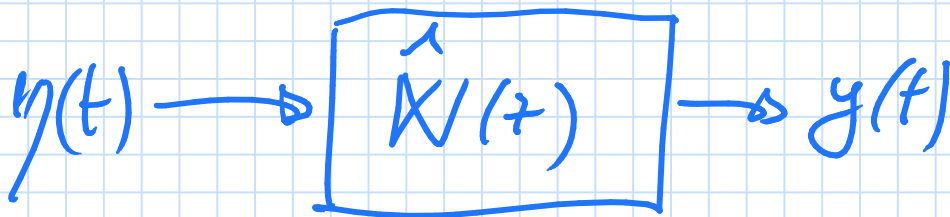
$$\frac{z + 1/3}{z + 3} \cdot \frac{z^{-1} + 1/3}{z^{-1} + 3} \cdot d_y^2 = 1$$

$$\rightarrow \frac{1 + z/3}{1 + 3z} = \frac{1/3 (z + 3)}{3 (z + 1/3)}$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{\cancel{z + 1/3}}{\cancel{z + 3}} \cdot \frac{\cancel{z + 3}}{\cancel{z + 1/3}} \cdot d_y^2 = 1$$

$$d_y^2 = 9$$

Il processo stocastico di $y(\cdot)$ allora è descritto da



$$y(\cdot) \sim WN(0, 9)$$

Trovo il predittore ottimo ad 1 passo alimentato dai dati.

$$\text{Se vale } \hat{W}(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

allora il processo di $y(\cdot)$ è:

$$A(z)y(t) = C(z)g(t)$$

Il predittore ottimo ad 1 passo lo posso determinare utilizzando l'espressione di [10-27]

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} y(t)$$

cioè:

$$\hat{W}(z) = \frac{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{5}z^{-1})}$$

← C(z)
← A(z)

$$\frac{C(z) - A(z)}{C(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \left[1 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2} \right]}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$= \frac{\cancel{1} + \frac{1}{3}z^{-1} - \cancel{1} + \frac{2}{15}z^{-1} + \frac{1}{15}z^{-2}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{\frac{7}{15}z^{-1} + \frac{1}{15}z^{-2}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

In definitiva:

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{15}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} y(t-1)$$

$$z^{-1} \left(\frac{7}{15} + \frac{1}{15}z^{-1} \right) y(t)$$

← y(t-1)

predittore ad 1 passo decidato

$$\hat{y}(t|t-1) = -\frac{1}{3}\hat{y}(t|t-1) + \frac{7}{15}y(t-1) + \frac{1}{15}y(t-2)$$

Ces b) rumore misurabile \rightarrow predittore ad 1 passo eliminato del rumore

considero la descrizione iniziale del processo stocastico, quella in cui compare il rumore bianco $e(t)$
 NON il fattore spettrale canonico [perché il fattore spettrale canonico ha in ingresso un rumore bianco di unità, NON equivalente ad $e(\cdot)$]:

$$\text{var } e(\cdot) = 1 \iff \text{var } y(\cdot) = 3 \quad]$$

Quindi ora il processo è:

$$e(t) \rightarrow \boxed{W(z)} \rightarrow y(t) \quad W(z) = \frac{1+3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

Se indico con $W(z)$: $W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$

allora il predittore ottimo ad 1 passo eliminato del rumore è (cfr. L10 - p 25)

$$e(t) \rightarrow \boxed{\hat{W}_1(z)} \rightarrow \hat{y}(t+1|t)$$

$$\hat{W}_1(z) = \frac{z[C(z)-A(z)]}{A(z)}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_1(z) &= \frac{z[C(z) - A(z)]}{A(z)} = \\ &= \frac{z \left[1 + 3z^{-1} - \left(1 - \frac{2}{15}z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2} \right) \right]}{1 - \frac{2}{15}z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2}} = \\ &= \frac{z \left(\cancel{1} + 3z^{-1} \cancel{1} + \frac{2}{15}z^{-1} + \frac{1}{15}z^{-2} \right)}{1 - \frac{2}{15}z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2}} = \\ &= \frac{z \left(\frac{47}{15}z^{-1} + \frac{1}{15}z^{-2} \right)}{1 - \frac{2}{15}z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2}} = \frac{\frac{47}{15} + \frac{1}{15}z^{-1}}{1 - \frac{2}{15}z^{-1} - \frac{1}{15}z^{-2}} \end{aligned}$$

predittore ad 1
 zero eliminato da numeratore

L'equazione alle differenze del predittore eliminato
 zero dal numeratore è:

$$\hat{y}(t+1|t) = \frac{2}{15} \hat{y}(t|t-1) + \frac{1}{15} \hat{y}(t-1|t-2) + \frac{47}{15} e(t) + \frac{1}{15} e(t-1)$$