

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

11 giugno 2021

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo A

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Domanda 1.1

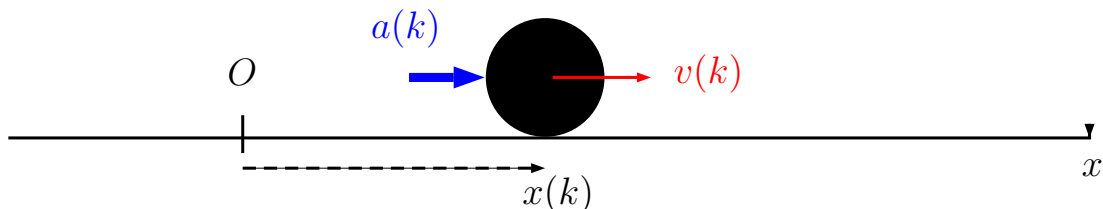
Si consideri il processo stocastico stazionario

$$y(t+1) = \frac{3}{4}y(t) + \eta(t) - \frac{1}{2}\eta(t-1) \quad \eta(\cdot) \equiv \text{WN}(4, 4)$$

- Si trovi il predittore ottimo $\hat{y}(t+1|t)$ e si specifichi la varianza dell'errore di predizione.

Domanda 1.2

Si vuole studiare il moto di un oggetto in movimento lungo una retta, come schematizzato in figura



Si assuma che

- l'oggetto in movimento abbia dimensioni trascurabili, in modo che si possa descrivere come *punto materiale*;
- dell'oggetto sono osservate posizione e velocità, entrambe affette da rumore di misura

$$\begin{cases} y_1(k) &= x(k) + \eta_1(k) \\ y_2(k) &= v(k) + \eta_2(k) \end{cases} \quad (1)$$

dove

$$\eta_1(\cdot) \equiv \mathcal{N}(0, 1) \quad , \quad \eta_2(\cdot) \equiv \mathcal{N}(0, 10)$$

- ad ogni istante di campionamento al sistema viene applicata l'accelerazione $a(k)$.

Si chiede di

1. descrivere il sistema con un modello in equazioni di stato, con stato del sistema descritto da posizione e velocità del *punto materiale*, tenendo conto del rumore di misura presente nelle equazioni (1.) Si supponga che il rumore di processo sia dato da

$$\epsilon(k) \equiv \mathcal{N}(0, 2)$$

e che l'accelerazione agente sul sistema sia identicamente nulla: $a(k) \equiv 0$.

2. determinare il **predittore di Kalman** che fornisce la predizione ottima dello stato $\hat{x}(k+1|k)$ per il sistema.
3. Come cambierebbero le equazioni del sistema e del predittore di Kalman nel caso in cui l'accelerazione fosse data da

$$a(k) = 2k(0.5)^k \cdot 1(k)$$

?

4. Si consideri ora lo stimatore dello stato del sistema dato da

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \tilde{v}(k) \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

dove la matrice C è quella che compare nell'equazione (1)

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(k) \\ \eta_2(k) \end{bmatrix}$$

Si chiede di confrontare le prestazioni dello stimatore (2) con quelle del predittore di Kalman determinato in precedenza. Per fare ciò, si assuma che la stima iniziale dello stato sia

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(1|0) \\ \hat{v}(1|0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}(1, 40) \\ \mathcal{N}(0, 10) \end{bmatrix}$$

e che le prime due osservazioni valgano

$$\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.384 \\ 0.235 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.882 \\ 1.198 \end{bmatrix}$$

Determinare la stima dello stato $[\hat{x}(2|1), \hat{v}(2|1)]^T$ col predittore di Kalman e $[\tilde{x}(2), \tilde{v}(2)]^T$ con lo stimatore (2). Confrontare i risultati e commentarli.