UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di misure meccaniche, termiche e collaudi

Prof. Rodolfo Taccani
Prof. Lucia Parussini
Prof. Marco Bogar

a.a.2022-2023

Outline

- Introduzione alla probabilità

Introduzione alla probabilità

La **teoria della probabilità** si interessa dello studio di **fenomeni casuali o aleatori** (osservabili ma non prevedibili).

E *spazio degli eventi* o *spazio campionario:* insieme dei risultati
A *evento casuale*: sottoinsieme di E, costituito da una o più *modalità* soddisfacenti a determinate condizioni prefissate.

Un evento A si dice:

- ELEMENTARE se è costituito da un solo elemento
- CERTO se coincide con E
- IMPOSSIBILE se è l'insieme vuoto $\emptyset$

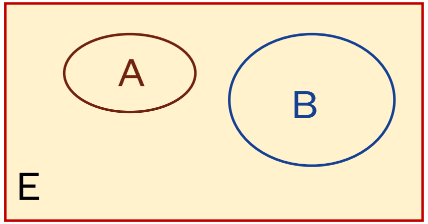
Esempi: il lancio di una moneta, di un dado, l'estrazione di una carta da un mazzo o di una pallina da un'urna.

- Lancio della moneta E={testa, croce}: "nel lancio della moneta esce o testa o croce" A =E ={testa, croce} (evento certo)
- Lancio del dado E={1,2,3,4,5,6} :
  - "esce un numero pari " A={2,4,6}
  - "esce il numero 3" A={3} (evento elementare)
  - "esce un numero inferiore a 1" A=$\emptyset$ (evento impossibile)

Introduzione alla probabilità

Eventi ***incompatibili* (o *disgiunti*):** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

$$A \cap B = \emptyset$$

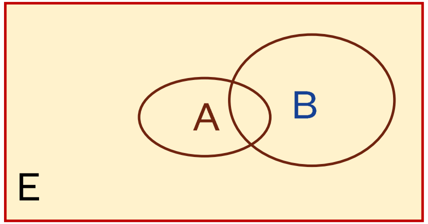


Esempio: l'apparizione simultanea di testa e di croce nel lancio di una moneta.

Osservazione: due eventi elementari sono sempre incompatibili !

Eventi ***compatibili:*** se il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro.

$$A \cap B \neq \emptyset.$$



Esempio: Nel lancio del dado l'evento "esce faccia 3" è compatibile con l'evento "esce faccia dispari ".

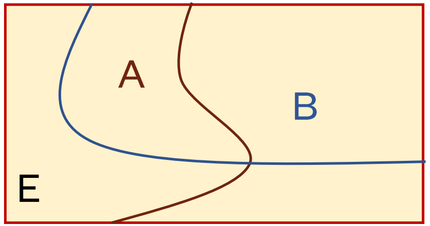
Introduzione alla probabilità

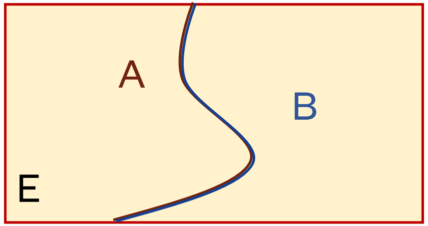
Due eventi A e B si dicono ***esaustivi*** se la loro unione genera l'intero spazio campionario.

$$A \cup B = E$$

Due eventi A e B si dicono ***complementari (o contrari)*** se sono disgiunti e la loro unione genera l'intero spazio campionario.

$$A \cup B = E \text{ e } A \cap B = \emptyset$$





Esempio: Consideriamo l'esperimento casuale lancio di un dado non truccato con spazio campionario E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A = {1, 3, 5} e B = {2, 3, 4, 5, 6}, corrispondenti rispettivamente al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari ed al caso in cui al lancio del dado escano i numeri maggiori di 1, sono esaustivi.

A = {1,3,5} e B = {2, 4, 6}, corrispondenti rispettivamente al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari ed al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari, sono complementari.

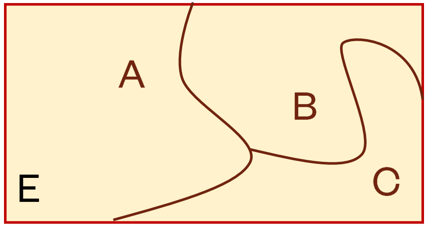
Introduzione alla probabilità

Gli n insiemi $A_1, A_{2,\dots}, A_n$ contenuti in E costituiscono una ***partizione*** di E se sono disgiunti e se la loro unione coincide con E.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$$

e

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad \dots \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad \dots A_{n-1} \cap A_n = \emptyset$$



Esempio: Consideriamo l'esperimento casuale lancio di un dado non truccato con spazio campionario E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A = {1} , B = {3, 6} , C = {2, 4, 5} sono una partizione di E.

Introduzione alla probabilità

Due eventi si dicono ***indipendenti*** se il verificarsi dell'uno non influisce sul verificarsi dell'altro.

Due eventi si dicono ***dipendenti*** se il verificarsi dell'uno influisce sul verificarsi dell'altro.

Degli eventi casuali si dicono ***eventi equiprobabili*** in una data prova se la simmetria dell'esperimento permette di supporre che nessuno di essi sia più probabile di un altro.

Esempio: l'apparizione di una delle sei facce di un dado nel caso in cui questo sia regolare (non truccato).

Ci sono vari approcci al *concetto di probabilità*:

- Definizione classica - probabilità classica (o a priori, o matematica, o di Laplace)
- Definizione frequentista - probabilità frequentista (o a posteriori, o statistica, o legge empirica del caso)
- Definizione soggettivista
- Definizione assiomatica

Introduzione alla probabilità

Definizione classica

Se con a indichiamo il numero di elementi dell'insieme A e con n l'insieme degli elementi dell'insieme E, la probabilità dell'evento A si scrive:

$$p = \frac{a}{n}$$

con

$$0 \leq p \leq 1$$

dove 0 evento impossibile e 1 evento certo.

Esempi:

- ❑ Lancio della moneta E={testa, croce} : "nel lancio della moneta esce o testa o croce" A =E ={testa, croce} $p = \frac{2}{2} = 1$
- ❑ Lancio del dado E={1,2,3,4,5,6}:
  - "esce un numero pari " A={2,4,6} $p = 3/6 = 0.5$
  - "esce un numero inferiore a 1" A=∅ $p = 0/6 = 0$

Definizione frequentista

Se indichiamo con m la frequenza assoluta dell'evento e con N il numero totale di prove effettuate, definiamo frequenza relativa, o semplicemente frequenza:

$$f = \frac{m}{N}$$

con

$$0 \leq f \leq 1$$

$$\lim_{N \to \infty} f(N) = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N} \approx \frac{a}{n} = p$$

Introduzione alla probabilità

Definizione soggettivista

Per gli eventi casuali per i quali non è possibile determinare la probabilità che si verifichino a priori, perché non si conosce il valore di a, e nemmeno la frequenza, perché non sono noti m e N, la valutazione relativa al loro verificarsi è affidata alla stima soggettiva, spesso suggerita dall'esperienza personale o dall'intuizione, non necessariamente supportata da considerazioni oggettive, ma espressa tuttavia in modo coerente.

Il modello soggettivo esprime il grado di fiducia che si ha nella realizzazione di un evento.

Evento	Probabilità
E' impossibile che, non è vero che	0
E' quasi impossibile che, non credo che	0 ÷ 0.1
E' molto difficile che, è improbabile che	0,1 ÷ 0,2
E' difficile che, dubito	0,2 ÷ 0,3
E' alquanto difficile che	0,3 ÷ 0,4
E' un po' improbabile che	0,4 ÷ 0,5
Non saprei decidere tra il sì e il no, forse	0,5
Ho una certa speranza che	0,5 ÷ 0,6
Ho buone speranze che	0,6 ÷ 0,7
E' probabile che	0,7 ÷ 0,8
E' molto probabile che	0,8 ÷ 0, 9
Sono quasi certo che, quasi certamente	0,9 ÷ 1
E' certo che, è vero che	1

Introduzione alla probabilità

Definizione assiomatica

Sia E l'insieme dei risultati di un fenomeno casuale A un evento, sottoinsieme di E.

La **probabilità dell'evento** A è la funzione $P(A)$ $(0 \leq P(A) \leq 1)$ che associa univocamente ad ogni sottoinsieme di E un numero reale $P(A)$.

Proprietà 1 $P(A) \geq 0 \quad \forall A$

Proprietà 2 $P(E) = 1$

Proprietà 3 Siano $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eventi casuali, sottoinsiemi di E, a due a due disgiunti.
La probabilità corrispondente alla loro unione è uguale alla somma delle singole probabilità, cioè

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Si verifica facilmente che $P(\emptyset) = 0$.

Teorema della probabilità dell’evento complementare o contrario

Sia $\bar{A}$ evento complementare di A, allora si ha:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$$

Esempio: se la probabilità che esca la faccia 1 nel lancio di un dado è pari a 1/6, la probabilità che esca una qualsiasi delle altre facce è: 1-1/6=5/6.

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità totale o di eventi incompatibili

Siano A_1 e A_2 due eventi incompatibili, allora si ha

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi degli eventi seguenti: esce la faccia 1, esce un numero pari. La probabilità dell'evento: "esce la faccia 1 oppure esce un numero pari", che corrisponde a quella dell'unione dei due insiemi, è data dalla somma delle due probabilità: 1/6+1/2=4/6=2/3.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi a due a due incompatibili, allora si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi dell'evento: "esce la faccia 1 oppure la faccia 3 oppure esce un numero pari", la probabilità dell'evento è data dalla somma: 1/6 +1/6+1/2=5/6.

Teorema della probabilità di eventi compatibili

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili, allora

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi degli eventi seguenti: esce la faccia 2, esce un numero pari. La probabilità dell'evento: "esce la faccia 2 oppure esce un numero pari", che corrisponde a quella dell'unione dei due insiemi, è data da: 1/6+1/2-1/3=2/6=1/3.

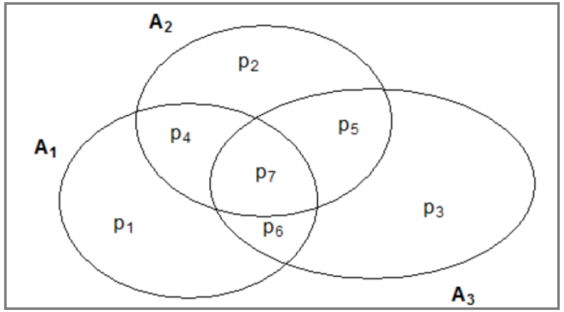
Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi compatibili, allora si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + \cdots + \\ +(-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Teorema della probabilità di eventi compatibili

Esempio:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{7} p_i$$



$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 2p_6 + 3p_7$$

$$P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3) = p_4 + p_5 + p_6 + 3p_7$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_7$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili indipendenti

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

Esempio: la probabilità di ottenere, in due lanci consecutivi del dado, la faccia 6 è pari a (1/6) (1/6) = 1/36.

Generalizzando: siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

Osservazione: La probabilità dell'unione di due eventi indipendenti è data da:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$$

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili dipendenti o della probabilità composta

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili e dipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

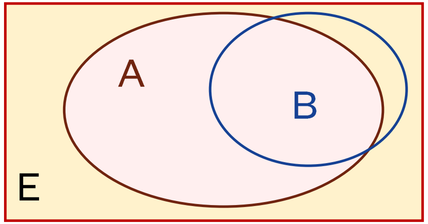
Esempio: In una scatola sono contenute 10 palline, 4 rosse e 6 nere.
$P(A)$ è la probabilità che in due estrazioni successive escano due palline entrambe nere
L'evento A_1: "esce una pallina nera alla prima estrazione" ha una probabilità pari a $P(A_1)$ = 6/10.
L'evento $A_2|A_1$: "esce una pallina nera alla seconda estrazione" ha una probabilità pari a $P(A_2|A_1)$= 5/9, poiché la prima pallina estratta non è più stata reintrodotta nella scatola.
L'evento A: "esce una pallina nera alla prima estrazione e una pallina nera alla seconda estrazione" ha una probabilità pari a $P(A)$ = (6/10)(5/9) = 1/3.

Probabilità condizionale

La probabilità condizionale di B dato A è il valore assunto dalla probabilità dell'evento B qualora si sappia che si è verificato l'evento A.

Sapendo che l'evento A si è verificato, concludiamo che il risultato del nostro esperimento deve essere un elemento del sottoinsieme A di E. Quindi la valutazione della nuova probabilità di B deve tenere conto dei soli risultati che sono presenti sia nel sottoinsieme A che nel sottoinsieme B, vale a dire nel sottoinsieme di E ottenuto intersecando i due sottoinsiemi A e B.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Introduzione alla probabilità

Teorema di Bayes

Consideriamo una partizione $A_1, A_{2,\ldots}, A_n$ di E. Sia inoltre B un evento di E. La formula di Bayes è:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Dalla definizione di probabilità condizionale segue che $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$

Consideriamo ora gli eventi $A_1 \cap B$,$A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$. Essi costituiscono chiaramente una partizione di B: infatti sono disgiunti e la loro unione coincide con B. Pertanto la probabilità di B, $P(B)$, è uguale alla somma delle probabilità degli eventi $A_i \cap B (i = 1,2,\ldots,n)$:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)$$

Dalla definizione di probabilità condizionale:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Introduzione alla probabilità

Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes si usa quando un evento B può verificarsi sotto diverse condizioni sulle quali si possono fare n ipotesi. Se si conosce la probabilità delle ipotesi nonché le probabilità condizionate, si potrà verificare se le ipotesi iniziali erano corrette o se devono essere modificate.

Esempio:
Una malattia colpisce 1 persona su 100. Un test dà esito positivo nel 98% dei casi su persone effettivamente malate e nello 0,5% dei casi su persone che invece stanno bene. Se una persona fa il test, che probabilità P ha di essere davvero malata se il test dà esito positivo?
A_1 la persona è malata, A_2 la persona è sana, B il test è positivo
$P(A_1|B)$ probabilità che la persona sia malata posto che il test sia positivo
$P(A_1) = 1/100$ incidenza della malattia (probabilità che la persona sia malata)
$P(B|A_1) = 98/100$ incidenza di positività sui malati (probabilità che il test sia positivo posto che la persona sia malata)
$P(A_2) = 99/100$ incidenza della non-malattia (probabilità che la persona sia sana)
$P(B|A_2) = 5/1000$ esito positivo sui sani (probabilità che il test sia positivo posto che la persona sia sana)

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{100}\frac{98}{100}}{\frac{1}{100}\frac{98}{100} + \frac{99}{100}\frac{5}{1000}} = 66.4\%$$

Teorema di Bayes

Esempio:
In un caso di omicidio ci sono due sospetti, A e B, considerati dalla polizia “ugualmente sospettati”. Sul luogo del delitto sono stati rinvenuti dei capelli non appartenenti alla vittima, e quindi appartenenti al colpevole. La prova del DNA sui capelli e sui due sospetti ha portato alla conclusione che il DNA ritrovato potrebbe appartenere all’80% ad A e al 50% a B.
Qual'è la probabilità che sia A il colpevole alla luce dell’analisi del test sul DNA? E che sia B?

Sappiamo:
$P(A) = P(B) = 0{,}5$ (probabilità che A sia colpevole uguale alla probabilità che B sia colpevole: 1/2)
$P(test|A) = 0.80$ (probabilità che il test sia positivo posto che A sia il colpevole)
$P(test|B) = 0.50$ (probabilità che il test sia positivo posto che B sia il colpevole)

Allora:
$P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B) = 0.8\ 0.5 + 0.5\ 0.5 = 0.65$

probabilità che A sia il colpevole posto che il test sia positivo
$P(A|test) = P(test|A)P(A) /[\ P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B)\ ] = 0.8\ 0.5 / 0.65 = 0.6 = 60\%$
probabilità che B sia il colpevole posto che il test sia positivo
$P(B|test) = P(test|B)P(B) /[\ P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B)\ ] = 0.5\ 0.5 / 0.65 = 0.4 = 40\%$

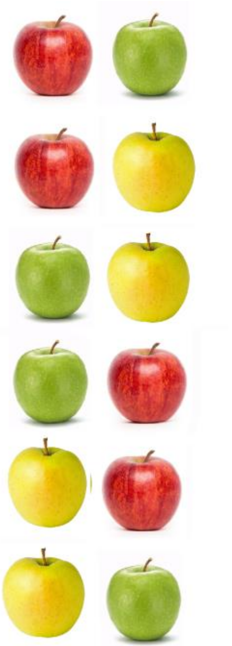
Richiami di calcolo combinatorio

Disposizioni semplici

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k, con $0 < k \leq n$, è dato da

$$\boxed{D_{n,k} = D_{n,k-1}(n-k+1) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$$

Esempio: n=3, k=2



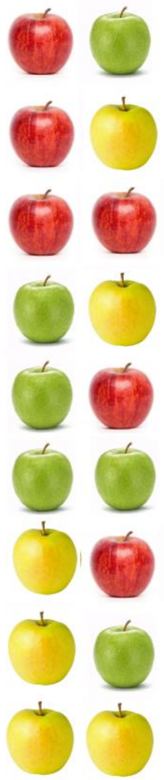
Richiami di calcolo combinatorio

Disposizioni con ripetizione

Nel caso in cui sia consentito ad un oggetto di figurare nei gruppi più di una volta, si parla di disposizioni con ripetizione. Sono disposizioni con ripetizione di classe k i raggruppamenti ottenibili da n oggetti distinti presi a k a k, in cui ogni oggetto può essere ripetuto fino a k volte:

$$\boxed{D'_{n,k} = n^k}$$

Esempio: n=3, k=2

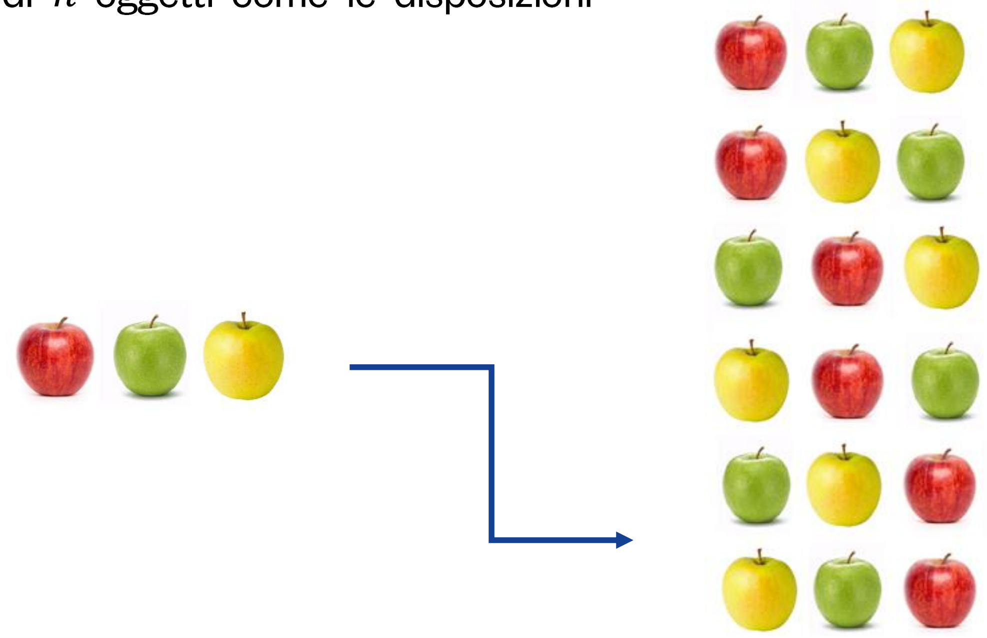


Permutazione semplice

Definiamo le *permutazioni semplici* di n oggetti come le disposizioni semplici degli n oggetti, presi a n a n

$$\boxed{P_n = D_{n,n} = n!}$$

Esempio: n=3



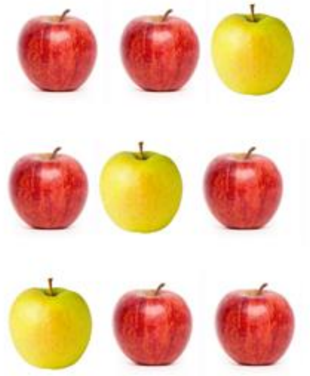
Richiami di calcolo combinatorio

Permutazione con ripetizioni

Il numero di permutazioni di n oggetti in cui uno o più elementi sono ripetuti più volte ($r, s, t, \dots$ volte) è dato dal rapporto tra il numero di permutazioni semplici degli n oggetti e quello delle permutazioni semplici degli $r, s, t, \dots$ oggetti:

$$\boxed{P_n^{(r,s,t,\dots)} = \frac{P_n}{P_r \cdot P_s \cdot P_t \cdot \cdots} = \frac{n!}{r!\, s!\, t! \dots}}$$

Esempio: n=3, r=2



Richiami di calcolo combinatorio

Combinazione semplice

Chiamiamo *combinazioni semplici* di n oggetti distinti presi a k a k (con $k \leq n$) tutti i gruppi contenenti k oggetti realizzabili con gli n oggetti dati, in modo tale che due gruppi qualsiasi differiscano tra loro per almeno un oggetto

$$\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k}P_k}}$$

Esempio: n=4, k=2

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di

Ingegneria e Architettura