

ESERCIZI DI ANALISI 2
Anno accademico 2022/2023 – Ingegneria
Prof. Alessandro Fonda

Calcolo differenziale

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Dire per quali valori di α la funzione è:

- continua
- differenziabile
- di classe C^1
- differenziabile due volte
- di classe C^2 .

2. Si dimostri che la funzione

$$h(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$$

non è differenziabile in $(0, 0)$.

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin((x^2 + y^2)^\alpha) & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Dire per quali valori di α la funzione è:

- continua
- differenziabile
- di classe C^1
- differenziabile due volte
- di classe C^2 .

4. Calcolare $H_f(x, y)$, la matrice hessiana in (x, y) della funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 + y).$$

5. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(0, 0)$ associato alla funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y)e^{x+y^2}.$$

6. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(0, 0)$ associato alla funzione

$$f(x, y) = (x + 2y + 3)e^{x^2+y^2}.$$

Equazioni differenziali

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 6x' + 9x = e^{3t}, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} x''' - 3x'' + 3x' - x = 24(1+t)e^t, \\ x(-4) = x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

3. Risolvere il seguente problema dei due punti:

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \sin x + \sin(3x) \\ y'(-\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

4. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = e^x, \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

6. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 2e^x, \\ u(0) = 1, \quad u(1) = e. \end{cases}$$

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''''(t) - x(t) = 1, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 2, \quad x'''(0) = 3. \end{cases}$$

8. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 4u'(x) + 4u(x) = -1 \\ u(0) = 0, \quad u'(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

9. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 4u(x) = 1 - 2\cos^2(x), \\ u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

10. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''' - x = e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

11. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + \pi^2 u(x) = e^x, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = 2xe^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

13. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 9u(x) = x + 1, \\ u(0) = 1, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Integrali e volumi

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = x;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + 4z^2 \leq x \leq 9\}.$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = |xy|;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 \leq z \leq 16\}.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = x^2;$$

calcolare $\int_{B_1} f$, dove

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq x + y\}.$$

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = |xz|;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq 1\}.$$

6. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1 - z \leq 1\}.$$

7. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z^2 \leq 4x^2 + y^2 + 1 \leq 5\}.$$

8. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1\}.$$

9. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x + y + 1\}.$$

10. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\}.$$

11. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\}.$$

12. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \geq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

13. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + 1\}.$$

Integrali e parametrizzazioni

1. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z^2 \leq 1, x - 2 \leq y \leq x + 2\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi $\int_{\sigma} f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + 2z^2}.$$

2. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq z = \sqrt{4x^2 + y^2} \leq 2\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi $\int_{\sigma} f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f(x, y, z) = xy.$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1, -1 \leq x = -z^2\},$$

dove I è un intervallo di \mathbb{R} . Sia inoltre

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 7x\}$$

il dominio della funzione $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y, z) = \sqrt{y - 7x}.$$

Calcolare l'integrale $\int_{\sigma} g$.

4. Trovare una parametrizzazione $\sigma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = y^2 - 1, |x - z| \leq 1, |x + z| \leq 2\}.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

5. Trovare una parametrizzazione $\sigma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x = y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

6. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x = 1 - (y^2 + z^2)\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi l'area di tale superficie.

7. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + 1, x^2 + 2x = 3 - y^2 - z^2\},$$

dove I è un intervallo di \mathbb{R} . Calcolare quindi la lunghezza di tale curva.

8. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4x^2 + 4z^2 \leq 1\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi l'area di tale superficie.

9. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 \leq 9\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi l'area di tale superficie.

10. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x + y| + 1 \leq 2, |y| \leq 1\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi l'area di tale superficie.

11. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, |z| \leq 1 \right\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi il flusso $\int_{\sigma} F \cdot dS$, dove $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori

$$F(x, y, z) = (2x, 2y, z).$$

12. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

dove I è un rettangolo di \mathbb{R}^2 . Calcolare quindi il flusso $\int_{\sigma} F \cdot dS$, dove $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori costante

$$F(x, y, z) = (1, 1, 0).$$

Integrali di forme differenziali

1. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^2 definita da

$$\omega(x, y) = 3x^2y \, dx + x^3dy .$$

Calcolare $\int_{\sigma} \omega$, dove $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è la curva definita da

$$\sigma(t) = (-t^2, t) .$$

2. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = (2x + 4y + 5z) \, dx + (4x + 4y + 6z) \, dy + (5x + 6y + 6z) \, dz .$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t^2, -3t, t^2) .$$

3. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) = & (2x(y + z) + 3x^2 + y^2 + z^2) \, dx + \\ & +(2y(x + z) + x^2 + 3y^2 + z^2) \, dy + \\ & +(2z(x + y) + x^2 + y^2 + 3z^2) \, dz . \end{aligned}$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t) .$$

4. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = (3x^2y + z^3) \, dx + (3y^2z + x^3) \, dy + (3z^2x + y^3) \, dz .$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2) .$$

5. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = \sin(xyz) \left(yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz \right) .$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva definita da

$$\gamma(t) = (2t, \pi t, t^2) .$$

6. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = y^2z(3x^2 + z^2) \, dx + 2xyz(x^2 + z^2) \, dy + xy^2(x^2 + 3z^2) \, dz .$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t).$$

7. Sia ω la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = 3x^2y \, dx - 6xy^2 \, dy + 6xyz \, dz.$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2).$$

8. Sia ω la 2-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = x \, dy \wedge dz - 2y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy.$$

Calcolare $\int_{\sigma} \omega$, dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u, u + v, v).$$

9. Sia ω la 2-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x, y, z) = xy \, dy \wedge dz + xz \, dz \wedge dx - yz \, dx \wedge dy.$$

Calcolare $\int_{\sigma} \omega$, dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u + v, u + v, u - v).$$

10. Sia ω la 2-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \, dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1 \, dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2 \, dx_1 \wedge dx_2.$$

Calcolare $\int_{\sigma} \omega$, dove $\sigma : [-2, 2] \times [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u^2, u + v, v^2).$$

11. Sia ω la 2-forma differenziale in \mathbb{R}^3 definita da

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 \, dx_2 \wedge dx_3 - (x_1 + x_3)x_2^2 \, dx_3 \wedge dx_1 + 2x_1x_2x_3 \, dx_1 \wedge dx_2.$$

Calcolare $\int_{\sigma} \omega$, dove $\sigma : [1, 2] \times [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (v, uv, u).$$