SERIE A TERMINI COMPLESSI

Identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, con la norma euclidea.

$$a+ib \sim (a,b)$$

$$|a+ib|^2 = a^2+b^2 = \|(a,b)\|^2$$

Sia $a_k = x_k + i y_k$

Consideriamo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k + i y_k) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (x_k, y_k)$.

In questo modo le somme parziali sono

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (x_k + i y_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)$$

$$= \sigma_n + i\tau_n$$

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge in $\mathbb{C}$ se e solo se $(\sigma_n)_n$ e $(\tau_n)_n$ convergono in $\mathbb{R}$.

E ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\right) + i\left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k\right)$.

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice assolutamente convergente $\iff$ $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ è convergente in $\mathbb{R}$.

OSS.

Se $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ sono a termini complessi e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha che se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ sono convergenti, allora anche $\sum_k (\alpha a_k + \beta b_k)$ è convergente in $\mathbb{C}$, e

$$\sum_k (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_k a_k + \beta \sum_k b_k .$$

Inoltre, se $\lambda \in \mathbb{C}$, si verifica che

$\sum_k \lambda a_k$ è conv. e $\sum_k \lambda a_k = \lambda \sum_k a_k .$

Si definisce il PRODOTTO ALLA CAUCHY di due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k .$$

Si tratta della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{dove} \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

TEOREMA DI MERTENS (senza dim.)

Se $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ sono convergenti con somma A e B rispettivamente, e se almeno una delle due è assolutamente convergente, allora il prodotto alla Cauchy

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) \text{ è}$$

convergente, e ha somma $A \cdot B$

cioè $$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_{k-j}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

SERIE DI FUNZIONI

Sia E uno spazio metrico e $V(\|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato e completo.

~~[illegible]~~

$\mathcal{F}(E, V)$, l'insieme delle funzioni ~~[illegible]~~ da E a V, è uno spazio vettoriale.

~~[illegible]~~

Consideriamo una successione $(f_k)_k$ di elementi di $\mathcal{F}(E, V)$

allora $\forall x \in E$, $(f_k(x))_k$ è una successione in V e

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ è una serie in V.

Se $\forall x \in E$ tale serie è convergente, allora $\forall x \in E$ si può definire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Si dice allora che la serie $\sum_k f_k(x)$ converge puntualmente a f.

Se consideriamo ora $B(E, V)$, lo spazio vettoriale delle funzioni limitate da E a V, allora esso è uno spazio vettoriale normato e completo, con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_V$$

Si dice che

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a f $\iff \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \right\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

Se $\sum_k f_k$ converge uniformemente a f e se f_k è continua $\forall k$, allora anche f è continua. (teorema noto)

Quindi si può lavorare nello spazio $C^0_b(E, V)$ delle funzioni continue e limitate da E a V.

SERIE DI POTENZE

Prendiamo $E = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$

$f_k(z) = a_k z^k$ con $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

e consideriamo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

Vogliamo determinare il più grande sottoinsieme di E su cui la serie converge puntualmente.

Abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA

Supponiamo che $\exists$

$$L := \lim_{k \to \infty} |a_k|^{1/k}.$$

1) Se $L=+\infty$, allora la serie converge solo per $z=0$.

2) Se $L=0$, allora la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$

3) Se $0<L<+\infty$, allora la serie converge per $|z|<\frac{1}{L}$
e non converge per $|z|>\frac{1}{L}$
La convergenza per $|z|<\frac{1}{L}$ <u>è assoluta</u>.

<u>Dim.</u>

1) Se $L=+\infty$, allora per $z\neq 0$, si ha che $|a_k|^{1/k} \geq \frac{1}{|z|}$ per $k \geq \bar{k}$, quindi

$|a_k||z|^k \geq 1$ per $k \geq \bar{k}$, non passa test Cauchy.

2) Se $L=0$, allora $\forall z$

$$\lim_{k\to\infty} \left(|a_k||z|^k\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}|z| = 0$$

e quindi la serie converge per il criterio della radice.

•) Se $0 < L < +\infty$, allora per $|z| < \frac{1}{L}$

si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left(|a_k|\,|z|^k\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}\,|z|$$

$$= L|z| < 1$$

e quindi ho convergenza per il criterio della radice

Se $|z| > \frac{1}{L}$ allora

$$\lim_{k\to\infty} \left(|a_k|\,|z^k|\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}\,|z| =$$

$$= L|z| > 1$$

e quindi non converge, per il criterio della radice.

~~Allora~~ $R := \frac{1}{L}$ si dice <u>raggio di convergenza</u> di $\sum a_k z^k$.

In generale la convergenza non è uniforme in $B(0,R)$, però lo è in $B(0,r)$ $\forall$ $r < R$.

Infatti $\|a_k z^k\|_\infty \leq |a_k| r^k$ ($z \in B(0,r)$)

$$e \quad \lim_{k\to\infty} \left(|a_k| r^k\right)^{1/k} = \frac{1}{R}\cdot r < 1$$

e quindi $\sum \|a_k z^k\|_\infty$ è convergente quindi la serie $\sum a_k z^k$ converge in norma $\|\cdot\|_\infty$ in $B(0,r)$ $\forall\, r < R$.

Conseguenza: definendo $f(z) = \sum a_k z^k$ in $B(0,R)$, f è continua.

Consideriamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

si ha

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{k}\log k!} = \lim_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{k}(\log k + \dots + \log 1)} \leq \lim_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{k}\frac{k}{2}\log\frac{k}{2}} = 0$$

e quindi converge $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Si definisce

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Col teorema di Mertens si vede che

$$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2)$$

infatti

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^j z_2^{k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} z_1^j z_2^{k-j}$$

$$= (\exp z_1)(\exp z_2)$$

prodotto alla Cauchy.

Vedremo perché l'abbiamo chiamata exp.