EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE n.

Consideriamo l'equazione omogenea

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, u = 0 \qquad (1)$$

e l'equazione non omogenea

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, u = f(t) \qquad (2)$$

Sono equivalenti al sistema

$$\begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1}' = -a_{n-1}(t)\, u_{n-1} - \dots - a_0(t)\, u_0 + f(t) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} u_0' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & 1 \\ -a_0 & \cdots & & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

In forma compatta

$$U'(t) = A(t)\, U(t) + F(t)$$

Sono equivalenti nel senso che se $u(t)$ è soluzione di (2) allora $(u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$ è soluz. di (3)

Mentre se $(u_0(t), \dots, u_{n-1}(t))$ è soluz. di (3) allora $u_0(t)$ è soluzione di (2).

Per il sistema (3) abbiamo esistenza e unicità della soluzione grazie ai teoremi generali.

L'ipotesi è che $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ siano continue su un intervallo I.

STRUTTURA DELL'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

Possiamo considerare sia soluzioni a valori in $\mathbb{R}$, sia soluzioni a valori in $\mathbb{C}$.

In quanto segue, con $\mathbb{K}$ indicheremo $\mathbb{R}$ o in alternativa $\mathbb{C}$.

Indichiamo con $V_0(\mathbb{K})$ l'insieme delle soluzioni di (1) a valori in $\mathbb{K}$.

Dimostreremo che $V_0(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale ~~su~~ $\mathbb{K}$ di dimensione n.

Indichiamo con $E(u)$ l'operatore

$$E(u) = u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)\, u(t).$$

$E : C^n \longrightarrow C^0$ è lineare, più precisamente

$$E : C^n(I, \mathbb{K}) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{K}) \text{ è } \mathbb{K}\text{-lineare,}$$

cioè $E(\lambda u + \mu v) = \lambda E(u) + \mu E(v)$

Quindi $V_0(\mathbb{K}) = \ker E$, il nucleo di E.

Consideriamo, con $t_0 \in I$, i seguenti n problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} E(u) = 0 \\ u(t_0) = 1 \\ u'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} E(u) = 0 \\ u(t_0) = 0 \\ u'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

e siano $u_{(0)}, \ldots, u_{(n-1)}$ le corrispondenti soluzioni.

Osserviamo che se $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, allora

$\lambda_0 u_{(0)} + \cdots + \lambda_{n-1} u_{(n-1)}$ risolve

$$\begin{cases} E(u) = 0 \\ u(t_0) = \lambda_0 \\ u'(t_0) = \lambda_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = \lambda_{n-1} \end{cases}$$

(4)

Quindi $u(t) \equiv 0$ se e solo se

$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-1} = 0$

Quindi $u_{(0)}, \ldots, u_{(n-1)}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{K}$.

Sia se $w : I \to \mathbb{K}$ una soluzione di (1)

Definiamo

$$u(t) = w(t_0)\, u_{(0)}(t) + w'(t_0)\, u_{(1)}(t) + \ldots + w^{(n-1)}(t_0)\, u_{(n-1)}(t)$$

Si ha $E(u) = 0$.

Inoltre
$$u(t_0) = w(t_0)$$
$$u'(t_0) = w'(t_0)$$
$$\vdots$$
$$u^{(n-1)}(t_0) = w^{(n-1)}(t_0)$$

Per il teorema di unicità,

$u(t) = w(t)$ e quindi

w è combinaz. ~~[illegible]~~ lineare

di $u_{(0)}, u_{(1)}, \ldots, u_{(n-1)}$

Quindi $u_{(0)}, \ldots, u_{(n-1)}$ è una base di $V(\mathbb{K})$ su $\mathbb{K}$.

Consideriamo ora l'equazione non omogenea (2).

Se u e v risolvono (2), allora $(u-v)$ risolve (1).

Viceversa, se φ risolve (2) e u risolve (1), allora $u+\varphi$ risolve (2).

Segue che per trovare tutte le soluzioni di (2) basta trovarne una particolare. La soluzione generale di (2) è

$$u(t) = \lambda_0 u_{(0)}(t) + \dots + \lambda_{n-1} u_{(n-1)}(t) + \varphi(t)$$

dove $u_{(0)}(t), \dots, u_{(n-1)}(t)$ è una base di $V(\mathbb{K})$ e φ è una soluzione particolare di (2).

OSSERVAZIONE

$u_{(0)}, \dots, u_{(n-1)}$ soluzioni di (1) sono linearmente indipendenti se e solo se $\forall t \in I$

$$\det \begin{pmatrix} u_{(0)}(t) & \cdots & u_{(n-1)}(t) \\ u'_{(0)}(t) & & u'_{(n-1)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{(0)}^{(n-1)}(t) & & u_{(n-1)}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

Matrice Wronskiana.

6

EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI

Cominciamo con un esempio di ordine 2, l'oscillatore armonico con smorzamento:

(E) $u'' + 2\mu u' + \omega_0^2 u = 0 \qquad \omega_0 > 0,\ \mu > 0.$

Cerchiamo soluzioni a valori in $\mathbb{C}$, per poi prenderne parte reale e immaginaria.

Facciamo un test con funzioni del tipo $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si ha $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

allora $e^{\lambda t}$ risolve (E) se e solo se

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\mu \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

e quindi $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0.}$$

Quindi λ deve essere soluzione di tale polinomio.

il discriminante è $\Delta = 4\mu^2 - 4\omega_0^2$

$$= 4(\mu^2 - \omega_0^2)$$

Ci sono tre casi:

1) $\mu > \omega_0$ (prevale lo smorzamento)

Ci sono due radici reali distinte

$$-\mu_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2-\omega_0^2} < 0$$

$$-\mu_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2-\omega_0^2} < 0$$

quindi otteniamo due soluzioni

$$u_1 = e^{-\mu_1 t} \qquad u_2 = e^{-\mu_2 t}$$

Sono linearmente indipendenti, perché se

$$\alpha e^{-\mu_1 t} + \beta e^{-\mu_2 t} = 0 \qquad \forall t,$$

allora $\alpha + \beta e^{-(\mu_2-\mu_1)t} = 0 \quad \forall t$

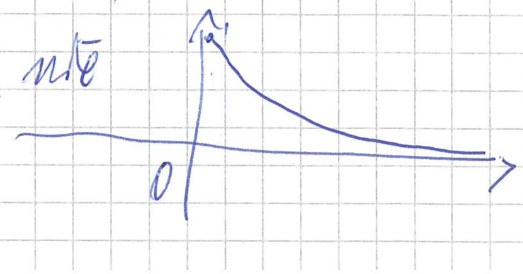
per $t \to +\infty$ $\quad e^{-(\mu_2-\mu_1)t} \longrightarrow 0$

e quindi $\alpha = 0$. Segue che anche $\beta = 0$.

Allora la soluzione generale è

$$u(t) = \alpha_1 e^{-\mu_1 t} + \alpha_2 e^{-\mu_2 t},$$ che

decade esponenzialmente



2) $\mu < \omega_0$ ci sono due radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = -\mu + i\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}$$

$$\lambda_2 = -\mu - i\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}$$

$\Rightarrow$ due soluzioni

$$u_1(t) = e^{-\mu t + i\omega t}, \quad u_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\omega t}$$

dove $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\mu^2}$

le combinazioni

$$\frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \qquad \frac{u_1(t) - u_2(t)}{2i}$$

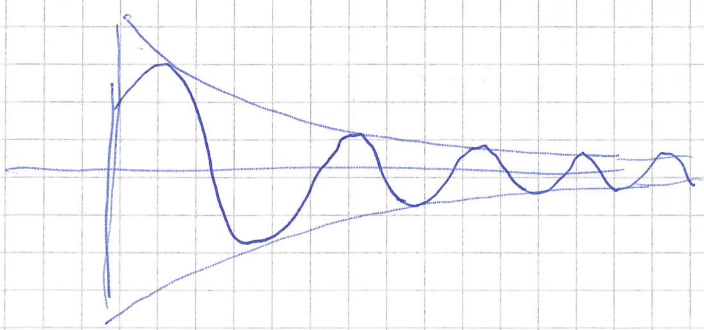
~~sono~~ sono ancora soluzioni, e ci danno

$$v_1(t) = e^{-\mu t}\cos\omega t \qquad v_2(t) = e^{-\mu t}\sin\omega t$$

che sono linearmente indipendenti.

La soluzione generale quindi è

$$u(t) = A e^{-\mu t}\cos\omega t + B e^{-\mu t}\sin\omega t$$



oscillazione smorzata.

Se $\mu = \omega_0$ ci sono due soluzioni coincidenti.

$$e^{-\mu t}$$

che non bastano per ottenere una base.

Però osserviamo che anche $te^{-\mu t}$ è soluzione.

Infatti $\frac{d}{dt} te^{-\mu t} = e^{-\mu t} - \mu t e^{-\mu t}$

$$\frac{d^2}{dt^2} te^{-\mu t} = -\mu e^{-\mu t} - \mu e^{-\mu t} + \mu^2 t e^{-\mu t}$$
$$= -2\mu e^{-\mu t} + \mu^2 t e^{-\mu t}$$

e quindi

$$u'' + 2\mu u' + \omega_0^2 u =$$
$$= \cancel{-2\mu e^{-\mu t}} \cancel{+\mu^2 t e^{-\mu t}} \cancel{+2\mu e^{-\mu t}}$$
$$\cancel{-2\mu^2 t e^{-\mu t}} \cancel{+\omega_0^2 t e^{-\mu t}} = 0$$

Allora la soluzione generale è

$$u(t) = (A + Bt)e^{-\mu t}$$