EQUAZIONI LINEARI A COEFF. COSTANTI

Sia $P(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$, $a_n = 1$

un polinomio. Sia $D = \frac{d}{dt}$

Definiamo $\forall u \in C^n(\mathbb{R})$

$$P(D)u = a_0 u + a_1 Du + \dots + a_n D^n u$$

PROPOSIZIONE

1) Se $P(T) = P_1(T) + P_2(T)$ allora

$$P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f$$

2) Se $Q(T) = P_1(T) \cdot P_2(T)$

allora

$$Q(D)f = P_1(D)\left(P_2(D)f\right).$$

Dimostrazione di 2)

$$P_1(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \qquad P_2(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j T^j$$

$$Q(T) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k T^k \qquad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

dove $a_i = 0$ per $i > n$ $b_j = 0$ per $j > m$

Allora

$$Q(D)f = \sum_{k=0}^{n+m} c_k D^k f = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) D^k f$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j D^{i+j} f\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i D^i (b_j D^j f)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i D^i (b_j D^j f)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \left(\sum_{j=0}^{m} b_j D^j f\right)$$

$$= P_1(D) (P_2(D) f) \quad \blacksquare$$

In particolare, $P_1(D) P_2(D) = P_2(D) P_1(D)$.

PROPOSIZIONE

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(D) e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}$

Dim. Discende da

$$D e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}. \quad \blacksquare$$

Sia $P(T) = T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_0$

Se $P(\lambda) = 0$ allora

$$P(D) e^{\lambda t} = 0$$

Quindi se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono soluzioni di $P(T) = 0$, allora $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}$ sono soluzioni di $P(D) u = 0$.

Vedremo come a partire da $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ si costruisce una base per lo spazio delle soluzioni di $P(D)u=0$.

LEMMA

$$(D-\lambda)^k \left(f(t) e^{\lambda t} \right) = f^{(k)}(t) e^{\lambda t}$$

Dim.

Per induzione su k.

$k=1$ $\quad (D-\lambda)(f(t) e^{\lambda t}) =$

$$= f'(t) e^{\lambda t} + \cancel{f(t) \lambda e^{\lambda t}} - \cancel{\lambda f(t) e^{\lambda t}}$$

$$= f'(t) e^{\lambda t}.$$

$k-1 \Rightarrow k$

$$(D-\lambda)^{k+1}(f(t)e^{\lambda t}) = (D-\lambda)\left[(D-\lambda)^{k}(f(t)\, e^{\lambda t})\right]$$
$$= (D-\lambda)\left(f^{(k)}(t)\, e^{\lambda t}\right)$$
$$= f^{(k+1)}\, e^{\lambda t}. \qquad \blacksquare$$

LEMMA

Sia $P(T)$ un polinomio e sia $P(\lambda) \neq 0$. Sia g un polinomio di grado k.

Allora $P(D)(g(t)e^{\lambda t}) = h(t)\, e^{\lambda t}$

dove h è un polinomio di grado k.

Dim.

Possiamo scrivere
$$P(T) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (T-\lambda)^\nu$$
e poiché $P(\lambda) \neq 0$, si ha $c_0 \neq 0$.

Ora
$$P(D)(g(t)e^{\lambda t}) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (D-\lambda)^\nu (g(t)\, e^{\lambda t})$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\, g^{(\nu)}(t)\, e^{\lambda t} = h(t)\, e^{\lambda t}$$

$c_0 \neq 0 \Rightarrow h(t)$ ha grado k. $\blacksquare$

Ora possiamo enunciare e dimostrare il teorema principale.

TEOREMA

Sia $P(T) = T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0$

con r soluzioni distinte

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ di molteplicità

$k_1, \dots, k_r$

allora $P(D)u = 0$ ha un sistema

fondamentale di soluzioni

$$\varphi_{jm}(t) = t^m e^{\lambda_j t} \qquad 1 \le j \le r, \quad 0 \le m \le k_j - 1$$

Dim.

$\forall j$ si può scrivere

$$P(T) = Q_j(T)(T - \lambda_j)^{k_j}$$

$Q_j(T)$ polinomio, $Q_j(\lambda_j) \ne 0$.

Si ha

$$P(D)\varphi_{jm} = Q_j(D)\left((D - \lambda_j)^{k_j}(t^m e^{\lambda_j t})\right)$$

$$= Q_j(D)\left[(D^{k_j} t^m)\, e^{\lambda_j t}\right] = 0 \text{ poiché } k_j > m.$$

Quindi $q_{m,j}$ sono tutte soluzioni (6)

Mostriamo che son linearmente indipendenti.

Una combinazione lineare delle $q_{j,m}$ è

$$\sum_{j=1}^{r} g_j(t)\, e^{\lambda_j t} \quad \text{con } \deg g_j \leq k_j - 1.$$

Mostriamo che se una combinazione di questo tipo è nulla, allora tutti i g_j sono nulli.

Induzione su $s = 1, \dots, r$,

s = numero degli addendi.

$\underline{s=1}$

$$g_1(t)\, e^{\lambda_1 t} = 0 \quad \forall t \Rightarrow g_1(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow g_1 = 0.$$

$s-1 \Rightarrow s$

Supponiamo che $\sum_{j=1}^{s} g_j(t) e^{\lambda_j t} = 0$

$$0 = (D - \lambda_s)^{k_s} \sum_{j=1}^{s} g_j(t) e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{s-1} h_j(t) e^{\lambda_j t} + \underbrace{(D-\lambda_s)^{k_s} g_s(t) e^{\lambda_s t}}_{=0}$$

con

$\deg h_j(t) = \deg g_j(t) \leq k_j - 1$

Per l'ipotesi induttiva, $h_j(t) = 0$

$j = 1, \dots, s-1$

da cui $g_j(t) = 0 \quad j = 1, \dots, s-1$

OSS.

Le radici di $P(\lambda)$ sono reali, o complesse coniugate

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l, \quad \alpha_1 \pm i\omega_1, \dots, \alpha_k \pm i\omega_k$

$\Rightarrow$ soluzioni

$t^m e^{\mu_j t}$

$t^m e^{\alpha_j t}(\cos \omega_j t \pm i \sin \omega_j t)$

$\longrightarrow \quad t^m e^{\alpha_j t} \cos \omega_j t$

$t^m e^{\alpha_j t} \sin \omega_j t$.