EQUAZIONI NON OMOGENEE

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\,u = f(t) \quad (N.O.)$$

Sia ψ una soluzione di (N.O.)

Sia φ una soluzione di (O.)

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\,u = 0 \quad (O.)$$

Allora $\varphi + \psi$ è solut. di (N.O.)

Inoltre se anche $\tilde{\psi}$ è solut. di (N.O.)

si ha che $\psi - \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$ è solut. di (O.), cioè $\tilde{\psi} = \psi - \tilde{\varphi}$.

Quindi, fissata ψ solut. di N.O.,

$$\{\text{soluzioni di } N.O.\} = \{\varphi + \psi \mid \varphi \text{ solut. di } O.\}$$

la generica solut. di N.O. è

$$u(t) = A_1\varphi_1 + \dots + A_n\varphi_n + \psi$$

$A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$,

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sist. fond. di (O.)

ψ solut. particolare di (N.O.).

VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, u = f(t)$$

Sia $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ un sistema fondamentale per l'omogenea associata

Si cerca una soluzione nella forma

$$\psi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t).$$

Deriviamo:

$$\psi'(t) = \sum c_i'\varphi_i + \sum c_i \varphi_i'$$

imponiamo

$$\sum c_i'\varphi_i = 0$$

allora

$$\psi''(t) = \sum c_i'\varphi_i' + \sum c_i \varphi_i''$$

imponiamo

$$\sum c_i'\varphi_i' = 0$$

$$\psi^{(n)} = \sum c_i'\varphi_i^{(n-1)} + \sum c_i \varphi_i^{(n)}$$

imponiamo

$$\sum c_i'\varphi_i^{(n-1)} = f$$

Con queste scelte, si ha:

$$\psi^{(n)} + a_{n-1}\psi^{(n-1)} + \dots + a_0\psi = f + \sum_i c_i\varphi_i^{(n)} + a_{n-1}\sum_i c_i\varphi_i^{(n-1)} + \dots + a_0\sum_i c_i\varphi_i = f$$

Quindi ψ è soluz.

Allora otteniamo che $c_1, \dots, c_n$ devono soddisfare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\text{è il Wronskiano } \Phi} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$ e si integra.

ESEMPIO

$$u'' - u = \frac{1}{1+e^t}$$

fare.

CASI SPECIALI

Consideriamo equazioni di ordine 2

$u'' + bu' + cu = f \quad (t)$

per $f = e^{\alpha t}$

si prova $\psi = Ae^{\alpha t}$

$\alpha^2 A e^{\alpha t} + b\alpha A e^{\alpha t} + cAe^{\alpha t} = 1\, e^{\alpha t}$

$(\alpha^2 + b\alpha + c) A = 1$

se α non è radice del polinomio caratteristico, siamo a posto.

Invece se α è radice semplice $(2\alpha + b \neq 0)$ prova con

$$\psi = Ate^{\alpha t}$$

$\psi' = Ae^{\alpha t} + A\alpha t e^{\alpha t}$

$\psi'' = 2\alpha A e^{\alpha t} + A\alpha^2 t e^{\alpha t}$

$$A\alpha^2 t e^{\alpha t} + 2\alpha A e^{\alpha t} + Ab\alpha t e^{\alpha t} + Abe^{\alpha t} + cAte^{\alpha t} = e^{\alpha t}$$

$2\alpha A e^{\alpha t} + Abe^{\alpha t} = e^{\alpha t}$

$(2\alpha + b) A = 1$

e si risolve.

se α è radice doppia $(2\alpha + b = 0)$

provo $\quad \psi = At^2 e^{\alpha t}$

$$\psi' = 2Ate^{\alpha t} + A\alpha t^2 e^{\alpha t}$$

$$\psi'' = 2Ae^{\alpha t} + 4A\alpha t e^{\alpha t} + A\alpha^2 t^2 e^{\alpha t}$$

$$2Ae^{\alpha t} + \boxed{4A\alpha t e^{\alpha t}} + A\alpha^2 t^2 e^{\alpha t}$$
$$+ \boxed{2Abte^{\alpha t}} + Ab\alpha t e^{\alpha t} + Act^2 e^{\alpha t} = e^{\alpha t}$$

$2Ae^{\alpha t} = e^{\alpha t}$ e si è risolto.

Consideriamo ora $f = \cos \omega t \quad \omega > 0$

o $f = \sin \omega t$

Si prova che

$$\psi = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\psi' = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\psi'' = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t) + b(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)$$
$$+ c(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \cos\omega t$$

$$\begin{cases} -A\omega^2 + bB\omega + cA = 1 \\ -B\omega^2 - b\omega A + cB = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c-\omega^2)A + b\omega B = 1 \\ -b\omega A + (c-\omega^2)B = 0 \end{cases}$$

è risolvibile se $\det \neq 0$.

$(c-w^2)^2 + (bw)^2 \neq 0$

cioè $b \neq 0 \vee c - w^2 \neq 0$

cioè che $\pm iw$ non siano le soluzioni

del polinomio caratteristico.

invece se ho

$u'' + w^2 u = \cos wt$

Provo con $\psi = At \cos wt + Bt \sin wt$

$\psi' = A \cos wt + B \sin wt - Awt \sin wt + Bwt \cos wt$

$\psi'' = -2Aw \sin wt + 2Bw \cos wt - Aw^2 t \cos wt - Bw^2 t \sin wt$

$\rightsquigarrow \quad -2Aw = 0 \qquad A = 0$

$\qquad 2Bw = 1 \qquad B = \frac{1}{2w}$

soluz. particolare

$$\frac{1}{2w} t \sin wt$$

ESEMPIO

Oscillazioni smorzate + forzate

$$u'' + 2\mu u' + \omega_0^2 u = \cos \gamma t$$

- Se $\mu = 0$ e $\gamma \neq \omega_0$

ho come soluz. generale

$$\varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

ho la sovrapposizione di due oscillazioni

- Se $\mu = 0$ e $\gamma = \omega_0$, ho

$$\varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{1}{2\gamma} t \sin \gamma t$$

risonanza, la soluzione ha ampiezza che va all' ∞ quando $t \to \infty$

- Se $\mu > 0$

una soluzione particolare è

$$\psi(t) = \alpha \cos \gamma t + \beta \sin \gamma t$$

dove α e β risolvono

$$(\omega_0^2 - \gamma^2)\alpha + 2\mu\gamma\beta = 1$$

$$-2\mu\gamma\alpha + (\omega_0^2 - \gamma^2)\beta = 0$$

La soluzione generale è

$$\varphi(t) = \underbrace{A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)}_{\text{decade esponenzialmente.}} + \alpha\cos\gamma t + \beta\sin\gamma t$$

Dopo un periodo di transizione, a regime la soluzione oscilla con la stessa frequenza del termine forzante.

$$u'' - u = \frac{1}{1+e^t}$$

omogenea

$u'' - u = 0$

polinomio caratteristico $\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = \pm 1$

sistema fondamentale e^t, e^{-t}

Soluzione generale della omogenea

$u(t) = Ae^t + Be^{-t}$

Wronskiano

$$W = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Soluz. particolare della non omogenea

$\varphi(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$

con

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^t} \end{pmatrix}$$

calcoliamo

$$W^{-1}(t) = (\det W)^{-1} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}^{T}$$

$$= (-2)^{-1} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^t} \end{pmatrix}$$

$$c_1' = \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{1+e^{t}}$$

$$c_2' = -\frac{1}{2} \frac{e^{t}}{1+e^{t}}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-t}}{1+e^{t}}\, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\, dx \Big|_{x=e^{-t}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(1+e^{-t}) - \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \int \frac{e^t}{1+e^t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x}\, dx \Big|_{x=e^t} = -\frac{1}{2} \log(1+e^t)$$

quindi la soluz particolare è

$$\psi = \frac{1}{2} \log(1+e^{-t})\, e^t - \frac{1}{2} \log(1+e^t)\, e^{-t} - \frac{1}{2}$$