Alcuni prerequisiti per il corso di Analisi 1 (breve vademecum, da perfezionare)

Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2016/2017

1 Un accenno ai simboli della logica

Nel linguaggio matematico abbiamo a che fare con proposizioni, che indichiamo con $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ecc. Inoltre, siamo soliti combinare queste proposizioni in vari modi:

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}\,, \qquad \mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}\,, \qquad \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}\,, \qquad \mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}\,.$$

Cercheremo ora di spiegarne meglio il significato. Iniziamo con

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}\,.$$

Essa è vera se sono vere entrambe, sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{Q}$; altrimenti è falsa. Possiamo costruire una tabellina che contempli tutti i quattro casi possibili: [1]

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vediamo ora

$$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}\,.$$

Essa è vera se almeno una delle due è vera; è falsa solo quando sono entrambe false, sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{Q}$. Ecco quindi la corrispondente tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

[1] In queste tabelle, V indica che una proposizione è vera, mentre F indica che è falsa.

Analizziamo ora
$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}\,.$$
Essa è falsa solo se $\mathcal{P}$ è vera e $\mathcal{Q}$ è falsa; in tutti gli altri casi è vera. Ecco la sua tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Concludiamo con
$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}\,.$$
Essa è vera se le due sono entrambe vere, oppure entrambe false. Altrimenti, è falsa. Vediamone la tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

È molto importante saper negare logicamente una proposizione. La negazione di $\mathcal{P}$ verrà indicata con $\neg\,\mathcal{P}$ (si legge "non $\mathcal{P}$"): essa è vera quando $\mathcal{P}$ è falsa, e viceversa. Ad esempio, valgono le seguenti *Regole di de Morgan*:
$$\neg\,(\mathcal{P} \;\text{ e }\; \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \neg\,\mathcal{P} \;\text{ o }\; \neg\,\mathcal{Q}\,.$$
$$\neg\,(\mathcal{P} \;\text{ o }\; \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \neg\,\mathcal{P} \;\text{ e }\; \neg\,\mathcal{Q}\,.$$
Si può inoltre verificare che
$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \quad \text{è equivalente a} \quad \neg\,\mathcal{P} \;\text{ o }\; \mathcal{Q}\,.$$
Ne segue che
$$\neg\,(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \mathcal{P} \;\text{ e }\; \neg\,\mathcal{Q}\,.$$

Talvolta le proposizioni coinvolgono una o più variabili. Ad esempio, potremmo averne del tipo $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$, in cui compare la variabile x. In questi casi, troveremo spesso i seguenti due tipi di proposizioni. La prima, [2]
$$\forall x \in A: \;\mathcal{P}(x)\,,$$
significa

"per ogni elemento x dell'insieme A si ha che $\mathcal{P}(x)$ è vera".

[2] Il simbolo $\in$ verrà introdotto nel prossima sezione.

La seconda,

$$\exists x \in A : \ \mathcal{P}(x)\,,$$

significa

"esiste almeno un elemento x dell'insieme A per cui si ha che $\mathcal{P}(x)$ è vera".

Vediamo come si esprimono le loro negazioni. Si ha che

$$\neg\,(\forall x \in A : \ \mathcal{P}(x)) \quad \text{è equivalente a} \quad \exists x \in A : \ \neg\,\mathcal{P}(x)\,,$$

mentre

$$\neg\,(\exists x \in A : \ \mathcal{P}(x)) \quad \text{è equivalente a} \quad \forall x \in A : \ \neg\,\mathcal{P}(x)\,.$$

2 Il linguaggio della teoria degli insiemi

2.1 I primi simboli

Ci risultano più o meno familiari alcuni insiemi numerici, quali ad esempio

$\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri naturali;
$\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri interi relativi;
$\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali;
$\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali.

La loro natura verrà ulteriormente approfondita durante le lezioni. D'altra parte, nel corso dei nostri studi, abbiamo incontrato diversi tipi di insiemi, e molti altri ne incontreremo in seguito. Per poterli trattare in maniera corretta, abbiamo bisogno di sviluppare un linguaggio, e per questo introdurremo ora alcuni simboli, e ne spiegheremo il significato.

Introduciamo il simbolo di "appartenenza". La scrittura

$$a \in A$$

significa "a appartiene all'insieme A", ossia "a è un elemento di A". La sua negazione si scrive $a \notin A$ e si legge "a non appartiene ad A", ovvero "a non è un elemento di A".

Ad esempio, sia $A = \{1, 2, 3\}$, l'insieme [3] i cui elementi sono i tre numeri naturali 1, 2 e 3. Abbiamo che

$$1 \in A\,, \qquad 2 \in A\,, \qquad 3 \in A\,,$$

mentre

$$4 \notin A\,, \qquad \tfrac{1}{2} \notin A\,, \qquad \pi \notin A\,.$$

[3] In questo esempio, l'insieme A viene definito elencandone gli elementi, che sono in numero finito.

Presentiamo ora il simbolo di "inclusione". Scriveremo

$$A \subseteq B$$

e leggeremo "A è contenuto in B" qualora ogni elemento di A sia anche un elemento di B. In simboli,

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in B\,.$$

Ad esempio, se come sopra $A = \{1, 2, 3\}$, si ha che $A \subseteq \mathbb{N}$, ma anche $A \subseteq \mathbb{R}$.

Se $A \subseteq B$, si dice che A è un "sottoinsieme" di B, e si può scrivere anche $B \supseteq A$. La negazione di $A \subseteq B$ si scrive $A \not\subseteq B$, oppure $B \not\supseteq A$, e si legge "A non è contenuto in B", oppure "B non contiene A".

Diremo che due insiemi A e B sono "uguali" se coincidono, ossia se hanno gli stessi elementi, e in tal caso scriveremo

$$A = B\,.$$

Si ha pertanto

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \;\text{ e }\; B \subseteq A\,.$$

La negazione di $A = B$ si scrive $A \neq B$; in tal caso si dice che A e B sono diversi, ovvero non coincidono. Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, si dice che A è un "sottoinsieme prorpio" di B.

Notiamo che sono soddisfatte le proprietà di una "relazione d'ordine":

- $A \subseteq A$;
- $A \subseteq B \;\text{ e }\; B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad A = B$;
- $A \subseteq B \;\text{ e }\; B \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq C$.

Concludiamo questa sezione introducendo un insieme molto particolare: si tratta dell'"insieme vuoto", un insieme che non possiede alcun elemento. Esso viene indicato con il simbolo

$$\emptyset\,.$$

Si conviene che $\emptyset$ sia sottoinsieme di qualsiasi insieme:

$$\emptyset \subseteq A\,, \quad \text{per qualsiasi } A\,.$$

2.2 Alcuni esempi di insiemi

Iniziamo con gli insiemi più semplici, quelli che hanno un unico elemento. Ad esempio,

$$A = \{3\}\,, \qquad A = \{\mathbb{N}\}\,, \qquad A = \{\emptyset\}\,.$$

Il primo è l'insieme che ha come unico elemento il numero naturale 3. Il secondo ha come unico elemento $\mathbb{N}$, il terzo ha solo l'elemento $\emptyset$. Osserviamo quindi che gli elementi di un insieme possono essere a loro volta degli insiemi. Potremmo avere insiemi del tipo

$$A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}\,, \qquad A = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}\,, \qquad A = \{\{\pi\}, \{1,2,3\}, \mathbb{N}\}\,,$$

oppure anche del tipo

$$A = \{3, \{3\}, \mathbb{N}, \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}\}\,.$$

In questo caso bisogna fare attenzione con i simboli: si ha che $3 \in A$, per cui $\{3\} \subseteq A$, ma anche $\{3\} \in A$, essendo $\{3\}$ un elemento di A.

Vediamo infine l'insieme

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,.$$

Abbiamo che $\emptyset \in A$, essendo $\emptyset$ uno degli elementi di A, e pertanto $\{\emptyset\} \subseteq A$. Ma abbiamo anche $\{\emptyset\} \in A$, essendo $\{\emptyset\}$ un elemento di A, e quindi $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$. Ricordiamo inoltre che si ha pure $\emptyset \subseteq A$.

2.3 Operazioni con gli insiemi

Normalmente si preferisce scegliere un "insieme universo" in cui lavorare. Lo denoteremo con E. Tutti gli oggetti di cui parleremo in seguito faranno parte di tale insieme.

Si definisce "l'intersezione" di due insiemi A e B: è l'insieme [4]

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}\,,$$

i cui elementi appartengono ad entrambi gli insiemi. Si noti che l'intersezione potrebbe anche essere l'insieme vuoto: in tal caso, si dice che A e B sono "disgiunti".

Invece, "l'unione" di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}\,,$$

i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi, possibilmente anche ad entrambi.

La "differenza" di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}\,,$$

i cui elementi appartengono al primo insieme ma non al secondo.

[4] Qui gli insiemi sono definiti specificando le proprietà che devono soddisfare i loro elementi.

In particolare, l'insieme $E \setminus A$ si chiama "complementare" di A e si denota con $\mathcal{C}A$. Pertanto, si ha

$$\mathcal{C}A = \{x : x \notin A\} .$$

Sono interessanti le seguenti *Regole di De Morgan*:

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B , \qquad \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B .$$

Il "prodotto" di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\, b \in B\} ,$$

i cui elementi sono le "coppie ordinate" (a, b), in cui al primo posto abbiamo un elemento di A e al secondo posto uno di B.

2.4 Il concetto di funzione

Una "funzione" (talvolta "applicazione") è definita assegnando tre insiemi:

- un insieme A, detto "dominio" della funzione;
- un insieme B, detto "codominio" della funzione;
- un insieme $G \subseteq A \times B$, detto "grafico" della funzione, con la seguente proprietà:

per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$.

La funzione così definita può essere indicata con $f : A \to B$ (si legge "f va da A a B"). Ad ogni elemento a del dominio viene pertanto associato un ben determinato elemento b del codominio: tale b verrà indicato con $f(a)$, e scriveremo $a \mapsto f(a)$. Abbiamo quindi

$$(a, b) \in G \quad \Longleftrightarrow \quad b = f(a) ,$$

ossia

$$G = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} = \{(a, f(a)) : a \in A\} .$$

Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $f(n) = n/(n + 1)$, [5] associa ad ogni $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ il corrispondente valore $n/(n + 1)$, ossia

$$n \mapsto \frac{n}{n+1} .$$

Pertanto, si avrà

$$0 \mapsto 0 , \qquad 1 \mapsto \frac{1}{2} , \qquad 2 \mapsto \frac{2}{3} , \qquad 3 \mapsto \frac{3}{4} , \qquad \ldots$$

Una funzione il cui dominio sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si chiama anche "successione", e si usa spesso una notazione differente: se $s : \mathbb{N} \to B$ è una tale successione, invece di $s(n)$ si usa scrivere s_n, e la successione stessa si denota con $(s_n)_n$.

[5] Si noti che i valori di questa funzione sono numeri razionali, per cui avremmo potuto definire con la stessa formula una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Una tale funzione è comunque diversa dalla precedente, in quanto le due non hanno lo stesso codominio.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ il suo quadrato. Si osservi che

$$f(-x) = f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Diremo che una tale funzione è "pari". Se invece, come avviene per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$, si ha che

$$f(-x) = -f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,,$$

diremo che una tale funzione è "dispari". Naturalmente, una funzione potrebbe non essere né pari né dispari.

Una funzione $f : \mathbb{R} \to B$, dove B è un qualsiasi insieme, si dice "periodica" se esiste un numero reale $T > 0$ per cui

$$f(x + T) = f(x)\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ad esempio, sono periodiche le funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, ...).

L'"immagine" della funzione $f : A \to B$ è l'insieme

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}\,.$$

Una funzione $f : A \to B$ si dice

- "iniettiva", se $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$;
- "suriettiva", se $f(A) = B$;
- "biiettiva", se è sia iniettiva che suriettiva.

Se $f : A \to B$ è biiettiva, allora per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (f è suriettiva), e tale elemento a è unico (f è iniettiva). Si può pertanto definire una funzione da B ad A, che ad ogni $b \in B$ associa quell'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Si tratta della "funzione inversa" di $f : A \to B$, che viene indicata con $f^{-1} : B \to A$. Si ha quindi

$$f(a) = b \quad \Longleftrightarrow \quad a = f^{-1}(b)\,.$$

3 La sommatoria

Risulta talvolta utile introdurre una notazione particolare per esprimere una somma di n elementi del tipo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\,.$$

Il simbolo usato è

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,,$$

e si legge "somma degli α_k per k che va da 1 a n". Viene quindi introdotto un indice, qui indicato con k, e gli si fanno assumere tutti i valori interi da 1 a n. Che l'indice sia indicato con la lettera k non è per nulla significativo: si può benissimo usare una qualsiasi altra lettera e scrivere, ad esempio

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \,, \qquad \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \,, \qquad \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \,, \qquad \sum_{\star=1}^{n} \alpha_\star \,, \qquad \ldots$$

Si noti che la stessa somma potrebbe anche essere scritta come

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} \,, \qquad \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{k-1} \,, \qquad \sum_{k=3}^{n+2} \alpha_{k-2} \,, \qquad \ldots$$

e anche, volendo, come

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+1-k} \,.$$

Ci sono quindi molte varianti nella notazione di sommatoria.

È conveniente definire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ anche nel caso in cui sia $n = 1$: si pone semplicemente

$$\sum_{k=1}^{1} \alpha_k = \alpha_1 \,,$$

Vediamo ora due proprietà della sommatoria.

Prima proprietà:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) \,,$$

ovvero

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n) = (\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+(\alpha_n+\beta_n) \,.$$

Seconda proprietà:

$$\sum_{k=1}^{n} (C\alpha_k) = C\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big) \,,$$

ovvero

$$C\alpha_1 + C\alpha_2 + \ldots + C\alpha_n = C(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \,.$$