CdS Mat, CdS Fis, Esame di Analisi 1, 24/1/2018 A

Nome e Cognome ....

Corso di studi .... **Del Santo** □ **Fonda** □

Esercizio 1. (3+6 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\arcsin(\frac{1}{x}) - \arcsin(\frac{1}{x^2})), \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{\sin x}}}{x^2\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\arcsin(\frac{1}{x}) - \arcsin(\frac{1}{x^2})) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arcsin t - \arcsin(t^2)}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\frac{\arcsin t}{t} - \lim_{t\to 0^+} \frac{\arcsin(t^2)}{t^2} = +\infty \cdot 1 - 1 = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{\sin x}}(e^{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}} - 1)}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{\sin x}} \frac{(e^{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}} - 1)}{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{x^2\sqrt{x}}.$$

Ora

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{\sin x}} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}} - 1)}{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}} = 1.$$

Poi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{\sin x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{\sin x})}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{\sin x})} = \frac{1}{2}.$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{\sin x}}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{12}$$

Esercizio 2. (9 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \log x - 2\arctan(x-2),$$

determinando

i) Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} \log x - 2\arctan(x-2) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x - 2\arctan(x-2) = +\infty.$$

iii) Derivata prima $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{(x-2)^2+1} = \dfrac{x^2-6x+5}{x(x^2-4x+5)}$

Segno di f': basta risolvere, per $x \in D$, la diseguaglianza $x^2 - 6x + 5 \geq 0$.
Si ottiene

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1 \ \vee \ x > 5,$$
$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1 \ \vee \ x = 5,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < 5.$$

iv) Intervalli di crescenza e decrescenza. Punti di massimo e di minimo.

$$f \quad \text{crescente per} \quad 0 < x < 1 \ \vee \ x > 5,$$

$$f \quad \text{decrescente per} \quad 1 < x < 5.$$

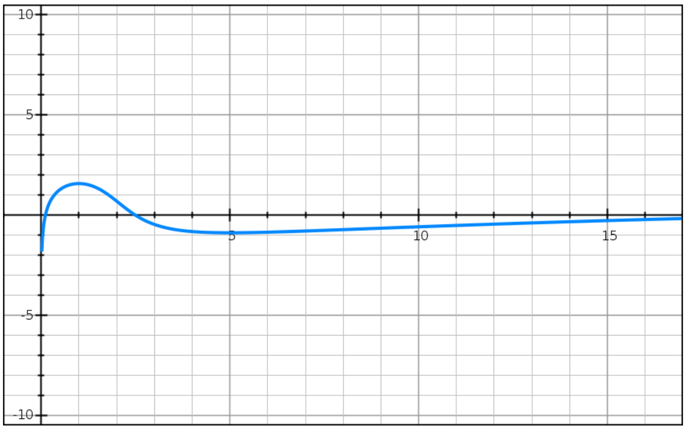
Massimo locale per $x = 1$, con $f(1) = \frac{\pi}{2} \approx 1,6$.

Minimo locale per $x = 5$, con $f(5) = \log 5 - 2\arctan 3 \approx -0,9$.

v) Derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\frac{2(x-2)}{(x^2-4x+5)^2} = -\frac{x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 40x + 25}{(x^2-4x+5)^2}.$$

vi) Grafico di f.



vii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$\log x = \alpha + 2\arctan(x-2).$$

Per $\alpha > \frac{\pi}{2}$ oppure $\alpha < \log 5 - 2\arctan 3$: una soluzione.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oppure $\alpha = \log 5 - 2\arctan 3$: due soluzioni.

Per $\log 5 - 2\arctan 3 < \alpha < \frac{\pi}{2}$: tre soluzioni.

Esercizio 3. (2+3+3 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

i) Supponiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f(n) = 0$. Provare che esiste $(y_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ e, per ogni n, $f'(y_n) = 0$.

   Applicando il teorema di Rolle alla funzione f ristretta all'intervallo $[n, n+1]$, per ogni n si ottiene un punto y_n contenuto in $[n, n+1]$, tale che $f'(y_n) = 0$. Poiché $y_n > n$, si ha $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

ii) Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Provare che esiste $(z_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} f'(z_n) = 0$.

   Applicando il teorema di Lagrange alla funzione f ristretta all'intervallo $[n, n+1]$, per ogni n si ottiene un punto z_n contenuto in $[n, n+1]$, tale che
   $$f'(z_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n).$$
   Si ha che $\lim_{n\to+\infty} f'(z_n) = \lim_{n\to+\infty} f(n+1) - f(n) = 0$ e infine, poiché $z_n > n$, si ha $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$.

iii) Supponiamo che esista $(x_n)_n$, successione in $\mathbb{R}$, tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$. Provare che esiste $(z_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} f'(z_n) = 0$.

   Poiché la successione $(x_n)_n$ tende a $+\infty$, è possibile trovare una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ tale che, per ogni k si abbia $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \geq 1$; si osservi che vale anche che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = +\infty$.
   Applicando il teorema di Lagrange alla funzione f ristretta all'intervallo $[x_{n_k}, x_{n_{k+1}}]$, per ogni k si ottiene un punto z_k contenuto in $[x_{n_k}, x_{n_{k+1}}]$, tale che
   $$f'(z_k) = \frac{f(x_{n_{k+1}}) - f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}}.$$
   Quindi
   $$|f'(z_k)| = |\frac{f(x_{n_{k+1}}) - f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}}| \leq |f(x_{n_{k+1}}) - f(x_{n_k})|.$$
   Si ha che $\lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_{k+1}}) - f(x_{n_k})| = 0$, da cui si deduce che
   $$\lim_{k\to+\infty} |f'(z_k)| = \lim_{k\to+\infty} f'(z_k) = 0$$
   e infine, poiché $z_k > x_{n_k}$, si ha $\lim_{k\to+\infty} z_k = +\infty$.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcoli, utilizzando la formula di Taylor, il valore di

i) $\cos(1)$ con una approssimazione di 10^{-2}.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste $\xi \in]0, x[$ tale che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cos\xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $\xi \in]0, 1[$ tale che

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cos\xi \frac{1}{(2n+2)!}.$$

È sufficiente che sia $|\cos\xi \frac{1}{(2n+2)!}| \leq 10^{-2}$. Di conseguenza basta che $(2n+2)! \geq 100$. Il minimo n che va bene è $n = 2$, infatti $4! = 24$ e $6! = 720$. Quindi l'approssimazione cercata è $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$.

ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ con una approssimazione di 10^{-2}.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, esiste $\xi \in]0, t[$ tale che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + e^\xi \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste $\xi \in]0, x^2[$ tale che

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x^2)^n}{n!}+e^\xi \frac{(x^2)^{n+1}}{(n+1)!} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+e^\xi \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Quindi, se $x \in [0, 1]$,

$$|e^{x^2} - (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!})| \leq e^\xi \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} \leq 3\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Quindi

$$|\int_0^1 e^{x^2}\, dx - \int_0^1 (1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!})dx| \leq \int_0^1 |e^{x^2} - (1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!})|dx$$

$$\leq \int_0^1 3\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}\, dx = \frac{3}{(n+1)!}\frac{1}{2n+3}.$$

Il più piccolo n tale che $\frac{3}{(n+1)!}\frac{1}{2n+3} \leq 10^{-2}$ è $n = 4$. Quindi sarà sufficiente calcolare

$$\int_0^1 (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!})dx.$$