CdS Fisica, Esame di Analisi Matematica 1, 18/2/2021 A

Nome e Cognome ....

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sin x)}{1-\cos(\sinh x)} = \boxed{-1}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \dfrac{3x^2+1}{4x}}{\ln \dfrac{5x^2-1}{6x}} = \boxed{1}\,.$$

1. Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sin x)}{1-\cos(\sinh x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sin x)}{(\sin x)^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{x}{\sinh x}\right)^2 \frac{(\sinh x)^2}{1-\cos(\sinh x)}$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = -1\,,$$

avendo usato i limiti notevoli, e in particolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(\sin x)}{(\sin x)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cosh y}{y^2} = -\frac{1}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2}{1-\cos(\sinh x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos y} = 2\,.$$

2. Uso le proprietà dei logaritmi e la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x^2+1)-\ln(4x)}{\ln(5x^2-1)-\ln(6x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{6x}{3x^2+1}-\dfrac{4}{4x}}{\dfrac{10x}{5x^2-1}-\dfrac{6}{6x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{3x^2+1}\,\frac{5x^2+1}{5x^2-1} = 1\,.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{(x+1)(x+4)}\,,$$

determinando:

i) Dominio: $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-1,-4\}}$.

Osservo che $f(x) > 0$ se $x \in\,]-\infty,-4[\,\cup\,]-1,+\infty[$,
$f(-3) = 0$, mentre $f(x) < 0$ se $x \in\,]-4,-3[\,\cup\,]-3,-1[$.

ii) Limiti importanti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1\,, \quad \lim_{x\to-4^-} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-4^+} f(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,,$$

Osservo che $f(0) = \frac{9}{4}$, e che $f(x) = 1$ se e solo se $x = -5$.

iii) Derivata prima $f'(x) = \boxed{-\dfrac{(x+3)(x+7)}{(x+1)^2(x+4)^2}}$

e suo segno.

Si ha che $f'(x) < 0$ se $x \in]-\infty,-7[\cup]-3,-1[\cup]-1,+\infty[$,

mentre $f'(x) > 0$ se $x \in]-7,-4[\cup]-4,-3[$.

iv) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

La funzione è strettamente decrescente su $]-\infty,-7[$, su $]-3,-1[$ e su $]-1,+\infty[$. È strettamente crescente su $]-7,-4[$ e su $]-4,-3[$. Presenta un punto di minimo locale in $x=-7$, con valore $f(-7) = \frac{8}{9}$, e un punti di massimo locale in $x=-3$, con valore $f(-3) = 0$.

v) Derivata seconda $f''(x) = \boxed{\dfrac{2(x^3+15x^2+63x+85)}{(x+1)^3(x+4)^3}}$

vi) Eventuali informazioni sulla concavità/convessità e grafico di f.

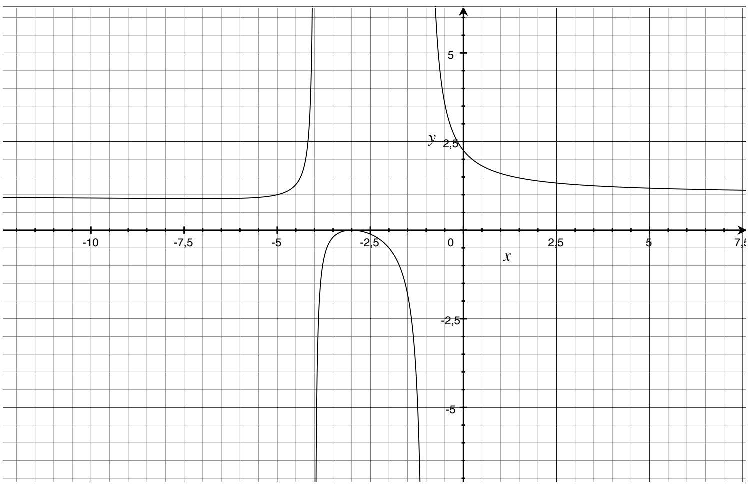
Studio la funzione $g(x) = x^3+15x^2+63x+85$ e vedo che è strettamente crescente su $]-\infty,-7[$ e su $]-3,+\infty[$, mentre è strettamente decrescente su $]-7,-3[$. Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty\,, \quad g(-7) = 36\,, \quad g(-3) = 4\,.$$

Ne deduco che esiste un unico punto $c \in]\infty,-7[$ in cui g si annulla, e che $g(x) < 0$ se $x < c$, mentre $g(x) > 0$ se $x > c$.

In conclusione, la funzione f è strettamente concava su $]-\infty,c[$ e su $]-4,-1[$, mentre è strettamente convessa su $]c,-4[$ e su $]-1,+\infty[$.

Eccone un grafico plausibile.



Esercizio 3. [1] (3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con

$$f'(-1) = 0 = f'(2)\,,$$

tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su } \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\,, \\ \text{strettamente concava su } \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\,, \\ \text{strettamente convessa su } \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\,. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) sia -1 che 2 sono punti di minimo locale.

La derivata f' è strettamente crescente su $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e su $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, mentre è strettamente decrescente su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Siccome $f'(-1) = 0$, ne segue che $f'(x) < 0$ se $x < -1$, e $f'(x) > 0$ se $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right]$. Quindi f è strettamente decrescente su $]-\infty, -1]$ e strettamente crescente su $\left[-1, -\frac{1}{2}\right[$, per cui -1 è un punto di minimo per f.

Analogamente, siccome $f'(2) = 0$, abbiamo che $f'(x) < 0$ se $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right[$ e $f'(x) > 0$ se $x > 2$. Quindi f è strettamente decrescente su $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ e strettamente crescente su $[2, +\infty[$, per cui 2 è un punto di minimo per f.

ii) esiste un unico punto di massimo locale in $[-1, 2]$.

Per Weierstrass, f ristretta a $[-1, 2]$ ha massimo. Per le considerazioni fatte sopra, i suoi punti di massimo devono stare in $\left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$. Per Fermat, la derivata si annulla in tali punti. Ma

$$f'\Big(-\frac{1}{2}\Big) > 0 > f'\Big(\frac{3}{2}\Big)\,,$$

e f' è strettamente decrescente su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Quindi f' si annulla in un unico punto in $\left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

iii) non esistono altri punti di massimo o di minimo locale.

Come visto sopra, la derivata si annulla solo in -1, in 2 e in un unico altro punto, nell'intervallo $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. I primi due sono punti di minimo locale, l'ultimo è di massimo locale.

[1] Il testo di questo esercizio è stato qui modificato, in quanto non esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, con $f'(-1) = 0 = f'(2)$, tale che

$$f \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente convessa su }]-\infty, -1[\,, \\ \text{strettamente concava su }]-1, 2[\,, \\ \text{strettamente convessa su }]2, +\infty[\,. \end{cases}$$

Infatti, la derivata f' di una tale funzione dovrebbe essere strettamente decrescente su $]-1, 2[$ con $f'(-1) = 0 = f'(2)$, il che è impossibile!

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^{3\pi} x\sin(2x)\,dx = \boxed{-\frac{3\pi}{2}}\,, \qquad \int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx = \boxed{-2\pi}\,.$$

1. Per parti,

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)\,dx &= -\frac{1}{2}x\cos(2x) - \int\Big(-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + c\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\int_0^{3\pi} x\sin(2x)\,dx = \Big[-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\Big]_0^{3\pi} = -\frac{3\pi}{2}\,.$$

2. Per parti due volte:

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx\\ &= x^2\sin x - \Big(-2x\cos x - \int(-2\cos x)\,dx\Big)\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx = \Big[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\Big]_0^{\pi} = -2\pi\,.$$