Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: MATRICI

1. Si determini la matrice 2×1 a coefficienti reali data dal seguente prodotto righe per colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix} .$$

2. Sia $A \in M_n(K)$ una matrice quadrata di ordine n. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, definiamo $A^k := \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k-\text{volte}}$, se $k \neq 0$; se $k = 0$ ed $A \neq 0$, definiamo $A^0 := I_n$.

Si calcoli la matrice 2×2 a coefficienti complessi data dalla seguente espressione:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 + I_2 .$$

3. Si dimostri che, per ogni $A \in M_n(K)$, la matrice $A \cdot {}^t A$ è simmetrica.

4. Una matrice $N \in M_n(K)$ è detta **nilpotente**, se esiste $k \in \mathbb{N}$, tale che $N^k = 0$.

i) Dimostrare che le seguenti matrici sono nilpotenti:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

per ogni scelta di $a, b, c, \in K$.

ii) Dimostrare che, se N è nilpotente, N non è invertibile.

5. Una matrice $A \in M_n(K)$ è detta **unipotente**, se esiste $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tale che $A^k = I_n$. Dimostrare che, se A è unipotente, A è invertibile.

6. Dire se le seguenti matrici sono invertibili e, nel caso affermativo, calcolare le rispettive inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

7. Sia $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$ una matrice diagonale. Dimostrare che A è invertibile, se e solo se $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$.