Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: SOTTOSPAZI, COMBINAZIONI LINEARI, BASI - I

1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\,,\ x-y=0 \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y=0\,,\ 3y-z=0 \right\}.$$

Si determinino equazioni lineari per $U \cap W$ e per $U + W$, cioè si determinino due sistemi lineari $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, tale che

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Si dica se la somma $U + W$ è diretta.
(Suggerimento: $U + W$ è l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare. Tale equazione è della forma $a(x+y+z) + b(x-y) = 0$, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$, ma anche della forma $c(x+2y) + d(3y-z) = 0$, per qualche $c, d \in \mathbb{R}$.)

2. Siano V_1, V_2 due spazi vettoriali sul campo K. Si consideri il prodotto cartesiano $V_1 \times V_2$, con la somma ed il prodotto per scalari definiti come segue:

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\,, \quad \forall v_1, w_1 \in V_1\,, \forall v_2, w_2 \in V_2\,,$$

$$a \cdot (v_1, v_2) = (av_1, av_2)\,, \quad \forall v_1 \in V_1\,, \forall v_2 \in V_2\,, \forall a \in K\,.$$

(a) Si dimostri che $V_1 \times V_2$, con tali operazioni, è uno spazio vettoriale su K.

(b) Si dimostri che $V_1 \times \{0\}$ e $\{0\} \times V_2$ sono sottospazi vettoriali di $V_1 \times V_2$, e che $V_1 \times V_2 = V_1 \times \{0\} \oplus \{0\} \times V_2$.

(Continua sul retro del foglio)

3. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(K)$, delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in K. Ricordiamo che una matrice $A \in M_n(K)$ è **simmetrica**, se $A = {}^tA$. Una matrice $A \in M_n(K)$ è **anti-simmetrica**, se $A = -{}^tA$.

(a) Si dimostri che, $\forall A \in M_n(K)$, $A + {}^tA$ è simmetrica, e $A - {}^tA$ è anti-simmetrica.

(b) Sia $\mathrm{Sim}_n(K) \subset M_n(K)$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche, e sia $\mathrm{Alt}_n(K) \subset M_n(K)$ il sottoinsieme delle matrici anti-simmetriche. Si dimostri che $\mathrm{Sim}_n(K)$ ed $\mathrm{Alt}_n(K)$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(K)$.

(c) Si dimostri che $M_n(K) = \mathrm{Sim}_n(K) \oplus \mathrm{Alt}_n(K)$.
(Suggerimento: si svolga prima il caso $n = 2$.)

4. Si determini un insieme di generatori per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ formato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} ix_1 - x_3 + (2+i)x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + (1-i)x_3 & = 0\,, \end{cases}$$

dove $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$.

5. Dati tre vettori v_1, v_2, v_3 di uno spazio vettoriale V, si dimostri che se $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_3)$, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Vale anche l'implicazione opposta?

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$, e siano v_1, v_2 due vettori linearmente indipendenti di V. Si dimostri che $v_1 + v_2, v_1 - v_2$ sono ancora linearmente indipendenti.

7. Si considerino i seguenti polinomi $P_1 = 1+t\,, P_2 = 1+2t+t^2\,, P_3 = t-t^2 \in \mathbb{R}[t]_2$.

a) Si dimostri che $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ è una base di $\mathbb{R}[t]_2$.

b) Si trovino le coordinate di $Q_1 = 2 - t + t^2$ e di $Q_2 = 3 + t^2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

8. Sia $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni con dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$. Sia $V = \{f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(x) = 0\,, \forall\, x \notin \{1, 2, 3\}\}$. Si dimostri che V è un sottospazio vettoriale finitamente generato di $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e se ne determini una base.