

5. Rango

Definizione 1. Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice $m \times n$ a coefficienti nel campo K . Il **rango** di A è la dimensione del sottospazio vettoriale di K^m generato dalle colonne di A ,

$$\text{rg}(A) := \dim \left(\text{Span} \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \right) \right).$$

In diversi libri di testo, il rango definito qui sopra viene chiamato “rango per colonne” di A , mentre il “rango per righe” si definisce come la dimensione del sottospazio vettoriale di $M_{1,n}(K)$ generato dalle righe di A , cioè

$$\dim \left(\text{Span} \left(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)} \right) \right).$$

Osserviamo che il rango per righe di A coincide con il rango della matrice trasposta di A . In seguito vedremo che $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$, quindi il rango per righe di A è uguale al rango per colonne di A .

Osservazione 1. $\text{Span} \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \right) \subset K^m$, perché le colonne di A sono vettori di K^m , quindi $\text{rg}(A) \leq \dim(K^m) = m$. D'altra parte $\text{rg}(A) \leq n$, perché A ha n colonne. Quindi $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Esempio 1. 1. Se A è la matrice nulla, $A = 0$, allora $\text{rg}(A) = 0$. Viceversa, se $\text{rg}(A) = 0$, allora $A = 0$.

2. $\text{rg}(I_n) = n$. Infatti le colonne della matrice unità sono i vettori della base canonica di K^n , $(I_n)^{(1)} = e_1, \dots, (I_n)^{(n)} = e_n$.

3. Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Per definizione,

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Per calcolare tale dimensione, usiamo il procedimento del capitolo precedente per trovare una base $\mathcal{B}$ di $\text{Span} \left(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)} \right)$ costituita da colonne di A .

Siccome $A^{(1)} \neq 0$, abbiamo che $A^{(1)} \in \mathcal{B}$. Ora consideriamo $A^{(2)}$, ed osserviamo che $A^{(2)} \notin \text{Span} \left(A^{(1)} \right)$, perché ogni vettore appartenente a $\text{Span} \left(A^{(1)} \right)$ deve

necessariamente avere come seconda componente 0. Quindi $A^{(2)} \in \mathcal{B}$. Osserviamo che $A^{(3)}, A^{(4)} \in \text{Span}(A^{(1)}, A^{(2)})$, poiché $A^{(3)} = A^{(1)} + A^{(2)}$ ed $A^{(4)} = -2A^{(1)}$. Quindi $A^{(3)}, A^{(4)} \notin \mathcal{B}$, da cui segue che $\mathcal{B} = \{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ e $\text{rg}(A) = 2$.

Osserviamo che anche $A^{(1)}, A^{(3)}$ sono linearmente indipendenti, così come $A^{(3)}, A^{(4)}$ sono linearmente indipendenti. Infatti il rango di una matrice A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, ma ci possono essere più collezioni formate da $\text{rg}(A)$ colonne di A linearmente indipendenti.

Proposizione 1. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$, e sia $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A tramite una sequenza di operazioni elementari. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A})$;
2. se $\tilde{A}$ è a scala, $\text{rg}(\tilde{A})$ è uguale al numero r delle righe non nulle di $\tilde{A}$, ed inoltre $\tilde{A}^{(d_1)}, \dots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti, dove $\tilde{a}_{1,d_1}, \dots, \tilde{a}_{r,d_r}$ sono i pivot di $\tilde{A}$.
3. $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}({}^t \tilde{A})$.

Dim. 1. Per dimostrare questa affermazione usiamo un risultato che vedremo più avanti, il *teorema della dimensione*. Questo teorema afferma che

$$\text{rg}(A) = n - \dim(W), \quad (1)$$

dove $W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}$ è il sottospazio vettoriale di K^n formato dalle soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari $A \cdot x = 0$. Se $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di operazioni elementari, allora il sistema di equazioni lineari $\tilde{A} \cdot x = 0$ è equivalente ad $A \cdot x = 0$, cioè $\widetilde{W} = W$, dove $\widetilde{W} = \{s \in K^n \mid \tilde{A} \cdot s = 0\}$ è il sottospazio di K^n delle soluzioni di $\tilde{A} \cdot x = 0$. Usando la formula (1) abbiamo quindi:

$$\text{rg}(A) = n - \dim(W) = n - \dim(\widetilde{W}) = \text{rg}(\tilde{A}).$$

2. Supponiamo ora che $\tilde{A}$ sia a scala, e sia r il numero delle righe non nulle di $\tilde{A}$. Sia $\tilde{a}_{ij}$ l'elemento di posto i, j di $\tilde{A}$. Siccome $\tilde{A}$ è a scala, si ha che $\tilde{a}_{ij} = 0$, se $i > r$, quindi $\tilde{A}^{(j)} \in \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$ per ogni $j = 1, \dots, n$, dove $\tilde{A}^{(j)}$ è la colonna j -ma di $\tilde{A}$ ed $e_1, \dots, e_r$ sono i primi r vettori della base canonica di K^n . Da questo segue che $\text{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \subseteq \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$, quindi

$$\text{rg}(\tilde{A}) = \dim \text{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \leq \dim \text{Span}(e_1, \dots, e_r) = r.$$

Per dimostrare che $\text{rg}(\tilde{A}) = r$, è sufficiente dimostrare che le colonne $\tilde{A}^{(d_1)}, \tilde{A}^{(d_2)}, \dots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti, dove $\tilde{a}_{1,d_1}, \tilde{a}_{2,d_2}, \dots, \tilde{a}_{r,d_r}$ sono i pivot di $\tilde{A}$. A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 \tilde{A}^{(d_1)} + \lambda_2 \tilde{A}^{(d_2)} + \dots + \lambda_r \tilde{A}^{(d_r)} \in K^m \quad (2)$$

e supponiamo che essa sia $= 0$. Osserviamo che (2) è un vettore della forma seguente:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \tilde{a}_{1d_1} + \lambda_2 \tilde{a}_{1d_2} + \dots + \lambda_r \tilde{a}_{1d_r} \\ \lambda_2 \tilde{a}_{2d_2} + \dots + \lambda_r \tilde{a}_{2d_r} \\ \vdots \\ \lambda_r \tilde{a}_{rd_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Siccome $\tilde{a}_{1d_1}, \tilde{a}_{2d_2}, \dots, \tilde{a}_{rd_r} \neq 0$, il vettore (3) è 0 se e solo se $\lambda_r = \lambda_{r-1} = \dots = \lambda_1 = 0$. Concludiamo quindi che le colonne $\tilde{A}^{(d_1)}, \tilde{A}^{(d_2)}, \dots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti e $\text{rg}(\tilde{A}) = r$.

Dimostriamo ora che le colonne $A^{(d_1)}, A^{(d_2)}, \dots, A^{(d_r)}$ di A sono linearmente indipendenti, dove $d_1, d_2, \dots, d_r$ sono gli indici di colonna dei pivot $\tilde{a}_{1d_1}, \tilde{a}_{2d_2}, \dots, \tilde{a}_{rd_r}$ di $\tilde{A}$. A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 A^{(d_1)} + \lambda_2 A^{(d_2)} + \dots + \lambda_r A^{(d_r)} \in K^m \quad (4)$$

e supponiamo che essa sia $= 0$. Consideriamo il vettore $s \in K^n$ definito come

segue: $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, dove

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq d_1, \dots, d_r, \\ \lambda_k, & \text{se } i = d_k, \text{ per } k = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Quindi

$$A \cdot s = \lambda_1 A^{(d_1)} + \lambda_2 A^{(d_2)} + \dots + \lambda_r A^{(d_r)} = 0.$$

Siccome $\tilde{A}$ è ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari, abbiamo che $\tilde{A} \cdot s = 0$. Osserviamo che

$$\tilde{A} \cdot s = \lambda_1 \tilde{A}^{(d_1)} + \lambda_2 \tilde{A}^{(d_2)} + \dots + \lambda_r \tilde{A}^{(d_r)},$$

e siccome $\tilde{A}^{(d_1)}, \tilde{A}^{(d_2)}, \dots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti, concludiamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$, quindi $A^{(d_1)}, A^{(d_2)}, \dots, A^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti.

3. È sufficiente dimostrare l'enunciato nel caso in cui $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 1, rispettivamente di tipo 2 o di tipo 3. Supponiamo dapprima che $\tilde{A}$ sia ottenuta da A scambiando la riga i -ma con quella j -ma, per qualche $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}$. Questo corrisponde allo scambio

della colonna i -ma con la j -ma di tA , quindi

$$({}^t\tilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}, & \text{se } k \neq i, j, \\ ({}^tA)^{(j)}, & \text{se } k = i, \\ ({}^tA)^{(i)}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Da questo segue immediatamente che

$$\text{Span}({}^tA^{(1)}, \dots, {}^tA^{(m)}) = \text{Span}({}^t\tilde{A}^{(1)}, \dots, {}^t\tilde{A}^{(m)}),$$

perciò $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$.

Supponiamo ora che $\tilde{A}$ si ottenga da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 3, precisamente sostituendo la riga j -ma con $A_{(j)} + cA_{(i)}$, per qualche $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, e $c \in K$. Allora

$$({}^t\tilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}, & \text{se } k \neq j, \\ ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, & \text{se } k = j, \end{cases}$$

ed in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{Span}({}^tA^{(1)}, \dots, {}^tA^{(m)}) &= \text{Span}({}^tA^{(1)}, \dots, {}^tA^{(j-1)}, {}^tA^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, {}^tA^{(j+1)}, \dots, {}^tA^{(m)}) \\ &= \text{Span}({}^t\tilde{A}^{(1)}, \dots, {}^t\tilde{A}^{(m)}), \end{aligned}$$

perciò $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$.

Si verifica analogamente che, se $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 2, allora $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$. Questo conclude la dimostrazione del punto 3. $\square$

Teorema 1. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Allora $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.*

Dim. Per i punti 1 e 3 della precedente proposizione, è sufficiente dimostrare che $\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$, dove $\tilde{A}$ è una matrice ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari. Sia dunque $\tilde{A}$ una matrice a scala ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari. Per il punto 2 della Proposizione 1 abbiamo che $\text{rg}(\tilde{A}) = r$, dove r è il numero delle righe non nulle di $\tilde{A}$. Dimostriamo quindi che $\text{rg}({}^t\tilde{A}) = r$. A tale scopo, sia

$$\lambda_1({}^t\tilde{A})^{(1)} + \dots + \lambda_r({}^t\tilde{A})^{(r)} \in K^n \quad (5)$$

una combinazione lineare delle colonne di $\tilde{A}$, e supponiamo che sia uguale al vettore 0. Osserviamo che $({}^t\tilde{A})^{(r+1)} = \dots = ({}^t\tilde{A})^{(m)} = 0$, quindi omettiamo queste colonne nella combinazione lineare. Inoltre si ha che la combinazione

lineare (5) ha la seguente forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1d_1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1d_2} + \lambda_2 \tilde{a}_{2d_2} \\ \vdots \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1d_r} + \dots + \lambda_r \tilde{a}_{rd_r} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Siccome $\tilde{a}_{1d_1}, \dots, \tilde{a}_{rd_r} \neq 0$, segue che $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Da questo segue che $(\tilde{A})^{(1)}, \dots, (\tilde{A})^{(r)}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\text{rg}(\tilde{A}) = r$. $\square$

Esempio 2. 1. Determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

A tale scopo trasformiamo A in una matrice a scala tramite una sequenza di operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Osserviamo che $\tilde{A}$ è a scala, $r = 2$, ed i pivot sono $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}$, quindi $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$. Dalla Proposizione 1 segue che $\text{rg}(A) = 2$ ed $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ è una base di $\text{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)})$.

2. Determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}).$$

A tale scopo trasformiamo A in una matrice $\tilde{A}$ a scala per mezzo di una sequenza

di operazioni elementari.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.
 \end{aligned}$$

Per la Proposizione 1 abbiamo che $\text{rg}(A) = 3$ ed $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ formano una base di $\text{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, A^{(5)})$.

Teorema 2 (Rouché-Capelli). *Un sistema di m equazioni lineari di ordine n , $A \cdot x = b$, è compatibile $\iff \text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$. In tal caso esso possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \text{rg}(A)$.*

Dim. Per la Proposizione 3 del capitolo 4, $A \cdot x = b$ è compatibile se e solo se $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$. Per il Lemma 1 del capitolo 4, $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ se e solo se $\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$. Quindi il sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se

$$\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b).$$

Siccome $\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$, i due spazi vettoriali sono uguali se e solo se hanno la stessa dimensione, cioè se e solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

Supponiamo ora che $A \cdot x = b$ sia compatibile. Il teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari afferma che

$$S = \tilde{s} + W,$$

dove $S = \{s \in K^n \mid A \cdot s = b\}$ è l'insieme delle soluzioni, $\tilde{s}$ è una soluzione particolare, e $W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}$ è il sottospazio vettoriale di K^n delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Per il teorema della dimensione (che vedremo nel capitolo 8), $\dim(W) = n - \text{rg}(A) = n - r$. Fissiamo una base $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ di W , allora ogni soluzione si scrive nella forma seguente

$$s = \tilde{s} + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r},$$

al variare dei parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r} \in K$. Quindi le soluzioni di $A \cdot x = b$ dipendono da $n-r$ parametri, questo significa che $A \cdot x = b$ ha ∞^{n-r} soluzioni. $\square$

Esempio 3. 1. Vogliamo determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema di 3 equazioni lineari di ordine 4 è compatibile, e per ogni tale a l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 &= a. \end{cases}$$

La matrice completa del sistema lineare è

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Trasformiamo $(A|b)$ per mezzo di operazioni elementari in modo tale da ottenere una matrice $(\tilde{A}|\tilde{b})$, con $\tilde{A}$ matrice a scala:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} = (\tilde{A}|\tilde{b}).$$

Osserviamo che $\text{rg}(\tilde{A}) = 2$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, mentre

$$\text{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{cases} 3, & \text{se } a \neq -1, \\ 2, & \text{se } a = -1. \end{cases}$$

Quindi il sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se $a = -1$, ed in tal caso ha ∞^2 soluzioni. Per $a = -1$, risolvendo il sistema lineare con il metodo di Gauß otteniamo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - s_3 + 2s_4 \\ -s_3 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} : s_3, s_4 \in K \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il seguente teorema afferma che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

Teorema 3. Sia $A \in M_n(K)$. Allora A è invertibile $\iff \text{rg}(A) = n$.

Dim. Come vedremo nel capitolo 8, A è invertibile, se e solo se la funzione lineare associata ad A , $L_A: K^n \rightarrow K^n$, $L_A(s) = A \cdot s$, è un isomorfismo $\iff n = \text{rg}(L_A) = \text{rg}(A)$. $\square$

Osservazione 2. È possibile dimostrare direttamente che, se A è invertibile, allora $\text{rg}(A) = n$, come segue. Sia $M \in M_n(K)$ la matrice inversa di A , quindi $A \cdot M = I_n$. Osserviamo che quest'ultima equazione si può riscrivere come segue: $A \cdot M^{(i)} = e_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, dove e_i è l' i -mo vettore della base canonica di K^n . Come visto nel capitolo 4, questo implica che $e_1, \dots, e_n \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, quindi $\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = K^n$, e $\text{rg}(A) = n$.

Osservazione 3. Se $A \in M_n(K)$ è invertibile, per calcolare la sua inversa A^{-1} si può procedere come segue. Ricordiamo che A^{-1} è quella matrice $M \in M_n(K)$ tale che $A \cdot M = I_n$. Quindi, per ogni $i = 1, \dots, n$, la colonna i -ma di M è l'unica soluzione del sistema di equazioni lineari

$$A \cdot x = e_i,$$

dove $e_i \in K^n$ è l' i -mo vettore della base canonica di K^n (l'unicità segue dal teorema di Rouché-Capelli perché $\text{rg}(A) = n$). Notiamo che è possibile risolvere questi sistemi lineari, per $i = 1, \dots, n$, “simultaneamente” nel seguente modo. Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} \in M_{n,2n}(K)$. Siccome A è invertibile, $\text{rg}(A) = n$, quindi è possibile trasformare $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ tramite una sequenza di operazioni elementari OE1, OE2, OE3, nella matrice $\begin{pmatrix} I_n & M \end{pmatrix}$. Siccome le operazioni elementari trasformano un sistema di equazioni lineari in uno equivalente, segue che la soluzione di $A \cdot x = e_i$ coincide con la soluzione di $I_n \cdot x = M^{(i)}$, che è $M^{(i)}$, quindi $M = A^{-1}$.

Esempio 4. 1. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Osserviamo che $\text{rg}(A) = 2$, quindi A è invertibile. Per calcolare A^{-1} , consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$, ed usiamo le operazioni elementari per trasformare la matrice 2×2 a sinistra in I_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Osserviamo che $\text{rg}(A) = 3$, quindi A è

invertibile. Per calcolare A^{-1} procediamo come sopra.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{7}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{6}{25} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{32}{25} & -\frac{14}{25} & \frac{26}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{13}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{11}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{13}{25} \\ -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$

Definizione 2. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, e siano $p \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, n\}$. Siano $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$. Con $A(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_q)$ denotiamo la matrice $p \times q$ a coefficienti in K il cui elemento di posto k, ℓ è dato da a_{i_k, j_ℓ} , per ogni $k = 1, \dots, p$ ed $\ell = 1, \dots, q$. $A(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_q)$ si chiama **sottomatrice** $p \times q$ di A .

Esempio 5. 1. Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e se $i_1 = 1, i_2 = 3, j_1 = 2, j_2 = 4$,

allora

$$A(1, 3 | 2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mentre

$$A(2 | 2, 3) = (-2 \quad 4), \quad A(1, 2, 3 | 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{(3)}.$$

Proposizione 2. Sia $A \in M_{m,n}(K)$, e sia B una sottomatrice $p \times q$ di A . Allora $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$.

Dim. Supponiamo che $B = A(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_q)$, per qualche $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$ con $i_1 < \dots < i_p$ e $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$ con $j_1 < \dots < j_q$. Consideriamo la seguente sottomatrice di A , $C := A(1, \dots, m | j_1, \dots, j_q)$, ed osserviamo

che $C = (A^{(j_1)} \dots A^{(j_r)})$. Chiaramente $\text{rg}(C) \leq \text{rg}(A)$. Inoltre, $B = \begin{pmatrix} C_{(i_1)} \\ \vdots \\ C_{(i_r)} \end{pmatrix}$, quindi $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(C)$, siccome il rango per righe coincide con il rango per colonne. Mettendo insieme le due disuguaglianze, $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(C) \leq \text{rg}(A)$. $\square$

Teorema 4. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Allora*

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \max\{\text{rg}(B) \mid B \text{ è una sottomatrice quadrata di } A\} \\ &= \text{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A. \end{aligned}$$

Dim. Indichiamo con $r = \text{rg}(A)$,

$$r_1 := \max\{\text{rg}(B) \mid B \text{ è una sottomatrice quadrata di } A\},$$

e con

$$r_2 := \text{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A.$$

Per la precedente proposizione $r \geq r_1$, e per il Teorema 3 $r_1 \geq r_2$. Quindi è sufficiente dimostrare che $r \leq r_2$. A tale scopo, siano $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ r colonne linearmente indipendenti di A , con $j_1 < \dots < j_r$. Consideriamo la sottomatrice $C = A(1, \dots, m \mid j_1, \dots, j_r)$ ed osserviamo che $\text{rg}(C) = r$. Siccome il rango per righe coincide con il rango per colonne, esistono r righe $C_{(i_1)}, \dots, C_{(i_r)}$ linearmente indipendenti. A meno di riordinare possiamo supporre che $i_1 < \dots < i_r$. Sia ora $B := C(i_1, \dots, i_r \mid 1, \dots, r) = A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r)$. Allora B è una sottomatrice quadrata di A , di ordine r e rango r . Quindi B è invertibile. Da questo segue che $r_2 \geq r$. $\square$

Esempio 6. 1. Determiniamo il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{5,3}(\mathbb{R}).$$

Poiché A è una matrice 5×3 , $\text{rg}(A) \leq \min\{3, 5\} = 3$. Osserviamo che $A(1, 2, 3 \mid 1, 2, 3)$ è una sottomatrice quadrata di A di rango 3. Quindi per il teorema precedente, si ha che $\text{rg}(A) \geq 3$. Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo

$$3 \leq \text{rg}(A) \leq 3,$$

di conseguenza $\text{rg}(A) = 3$.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{6,4}(\mathbb{R}).$$

Si ha che $\text{rg}(A) \leq \min\{6, 4\} = 4$. Inoltre $\text{rg}A(1, 2, 4, 5 \mid 1, 2, 3, 4) = 4$, quindi $\text{rg}(A) = 4$.