Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: RANGO

1. Per ognuna delle seguenti matrici si determini il suo rango ed un numero di colonne linearmente indipendenti pari al rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Siano $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ e $B \in \mathrm{M}_{n,p}(K)$. Si dimostri che

$$\mathrm{rg}(A \cdot B) \leq \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\},$$

dove $A \cdot B$ è il prodotto righe per colonne di A e B. Si fornisca un esempio di matrici $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ e $B \in \mathrm{M}_{n,p}(K)$, tale che $\mathrm{rg}(A \cdot B) < \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$ ed un esempio in cui $\mathrm{rg}(A \cdot B) = \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$.

3. Sia $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ e sia $c \in K \setminus \{0\}$ uno scalare diverso da 0. Sia $cA \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ il prodotto per scalari di A e c. Si dimostri che $\mathrm{rg}(cA) = \mathrm{rg}(A)$.

4. Si dica se il seguente sistema di equazioni lineari è compatibile,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = -1 \,. \end{cases}$$

Nel caso affermativo se ne determini le soluzioni.

5. Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni lineari di ordine n, formato da n equazioni. Si supponga che la matrice dei coefficienti $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sia invertibile. Si dimostri che il sistema di equazioni lineari è compatibile ed ha un'unica soluzione. (Suggerimento: si ricordi che A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$.)