

## 8. Applicazioni lineari

### 1 Definizione e prime proprietà

**Definizione 1.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali sul campo  $K$ . Una applicazione lineare da  $V$  in  $W$  è una funzione  $f: V \rightarrow W$  che soddisfa le seguenti proprietà:

$$(AL1) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \text{ per ogni } v_1, v_2 \in V;$$

$$(AL2) \quad f(c \cdot v) = c \cdot f(v), \text{ per ogni } c \in K \text{ e per ogni } v \in V.$$

L'insieme di tutte le applicazioni lineari da  $V$  in  $W$  si denota con  $\text{Hom}(V, W)$ .

Un'applicazione lineare da  $V$  in  $V$ ,  $f: V \rightarrow V$ , è anche detta un **endomorfismo** di  $V$ . L'insieme di tutti gli endomorfismi di  $V$  si denota con  $\text{End}(V)$ .

Un **isomorfismo** da  $V$  in  $W$  è un'applicazione lineare biettiva  $f: V \rightarrow W$ .

Un isomorfismo da  $V$  in  $V$  si chiama anche **automorfismo**. L'insieme degli automorfismi di  $V$  si denota con  $\text{GL}(V)$ . Se  $V = K^n$ , allora si usa la notazione  $\text{GL}_n(K)$  in luogo di  $\text{GL}(K^n)$ .

Si osservi che, nella proprietà (AL1), la somma  $v_1 + v_2$  è quella in  $V$ , mentre  $f(v_1) + f(v_2)$  è la somma dei vettori  $f(v_1)$  e  $f(v_2)$  in  $W$ . Analogamente, in (AL2),  $c \cdot v$  è il prodotto del vettore  $v$  per lo scalare  $c$  in  $V$ , mentre  $c \cdot f(v)$  è il prodotto dello scalare  $c$  per il vettore  $f(v)$  in  $W$ . Per questo motivo si dice anche che un'applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  “rispetta le operazioni di somma e di prodotto per scalari” di  $V$  e  $W$ .

Le seguenti osservazioni seguono direttamente dalle proprietà (AL1), (AL2), la verifica è lasciata per esercizio.

**Osservazione 1.** 1. Se  $f: V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare, allora  $f$  manda il vettore nullo di  $V$  nel vettore nullo di  $W$ , in simboli  $f(0) = 0$ .

Infatti possiamo scrivere il vettore nullo di  $V$  come segue,  $0 = 0 \cdot v$ , dove lo 0 a sinistra è il vettore nullo di  $V$ , mentre lo 0 a destra è lo scalare  $0 \in K$ ,  $v \in V$  è un qualsiasi vettore. Dalla (AL2) segue che  $f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$ .

2. Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, e sia  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ , per qualche  $v_1, \dots, v_k \in V$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ . Allora  $f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_k f(v_k)$ . In altre parole, per ogni  $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ , l'immagine di  $v$  secondo  $f$ ,  $f(v)$ , è determinata da  $f(v_1), \dots, f(v_k)$  e dai coefficienti della combinazione lineare.

3. Siano  $f \in \text{Hom}(V, W)$  e  $g \in \text{Hom}(W, U)$ , allora  $g \circ f \in \text{Hom}(V, U)$ .

4. Se  $f: V \rightarrow W$  è un isomorfismo, allora la funzione inversa  $f^{-1}: W \rightarrow V$  è lineare, quindi anche  $f^{-1}$  è un isomorfismo.

5. Le proprietà (AL1) ed (AL2) sono indipendenti l'una dall'altra. Ad esempio, per  $V = \mathbb{C}$  e  $K = \mathbb{C}$ , la funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$  (dove  $\bar{z}$  è il coniugato di  $z$ ), soddisfa la proprietà (AL1), ma non la (AL2).

Sia ora  $V = \mathbb{R}^2$  e  $K = \mathbb{R}$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$ . Si verifica facilmente che  $f$  soddisfa la proprietà (AL2) ma non la (AL1).

6.  $\text{Hom}(V, W)$  è uno spazio vettoriale su  $K$  con la somma ed il prodotto per scalari definiti come segue:  $\forall f, g \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $f + g: V \rightarrow W$  è la funzione definita come segue,  $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ ,  $\forall v \in V$ ;  $\forall f \in \text{Hom}(V, W)$  e  $\forall c \in K$ ,  $c \cdot f: V \rightarrow W$  è la funzione definita come segue,  $(c \cdot f)(v) = c \cdot f(v)$ ,  $\forall v \in V$ . (Si verifichi che le applicazioni  $f + g$  e  $c \cdot f$  così definite sono lineari.)

**Esempio 1.** In seguito  $V$  e  $W$  denotano due spazi vettoriali arbitrari su un campo  $K$ . La verifica della linearità delle seguenti applicazioni lineari è lasciata per esercizio.

1. La **applicazione nulla**  $0: V \rightarrow W$ , che associa ad ogni vettore  $v \in V$  il vettore nullo di  $W$ ,  $0(v) = 0$ ,  $\forall v \in V$ , è un'applicazione lineare.

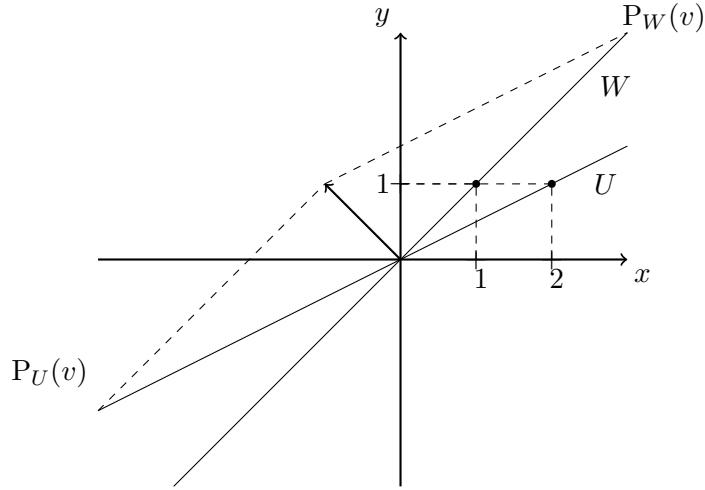
2. La **funzione identità**  $\text{Id}_V: V \rightarrow V$ ,  $\text{Id}_V(v) = v$ ,  $\forall v \in V$ , è un'applicazione lineare.

3. Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e sia  $f_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n$  la funzione che associa ad ogni vettore  $v \in V$  le sue coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$ ,  $f_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  se e solo se  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . La funzione  $f_{\mathcal{B}}$  è un isomorfismo da  $V$  in  $K^n$ .

4. Supponiamo che  $U, W \subseteq V$  siano due sottospazi vettoriali di  $V$ , e che  $V = U \oplus W$ . Ricordiamo che, in tal caso, per ogni  $v \in V$  esistono e sono unici due vettori  $u \in U$  e  $w \in W$  tali che  $v = u + w$ . La **proiezione di  $V$  su  $U$**  si definisce come la funzione  $P_U: V \rightarrow V$  che associa ad ogni  $v \in V$  il vettore  $P_U(v) = u$ , dove  $u \in U$  è tale che  $v = u + w$  per qualche  $w \in W$ . Allora  $P_U$  è un'applicazione lineare.

Osserviamo che, in tali condizioni è definita in modo analogo la proiezione di  $V$  su  $W$ ,  $P_W$ . Usando la precedente notazione  $P_W(v) = w$ .

Ad esempio, siano  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $W = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



Osserviamo che  $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ , quindi sono definite le proiezioni  $P_U, P_W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Consideriamo il vettore  $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , ed osserviamo che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi  $P_U \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , e  $P_W \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Osserviamo che, dalla regola del parallelogramma,  $P_U \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  è il vettore che si ottiene intersecando la retta parallela a  $W$  passante per il punto  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  con  $U$ , mentre  $P_W \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  è il vettore che si ottiene intersecando la retta parallela ad  $U$  passante per il punto  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  con  $W$ .

In generale, per ogni vettore  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi  $P_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ x-y \end{pmatrix}$ , e  $P_W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ -x+2y \end{pmatrix}$ .

**5.** Per ogni matrice  $m \times n$  a coefficienti nel campo  $K$ ,  $A \in M_{m,n}(K)$ , possiamo

definire una funzione  $L_A: K^n \rightarrow K^m$  nel seguente modo:  $\forall v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ ,

$$L_A(v) := A \cdot v = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^m,$$

dove  $A \cdot v$  è il prodotto righe per colonne di  $A$  e  $v$ . La funzione  $L_A$  è lineare. La proprietà (AL1) segue dalla proprietà distributiva del prodotto righe per colonne rispetto alla somma, mentre la (AL2) segue dal fatto che la moltiplicazione per scalari commuta con il prodotto righe per colonne.

Ad esempio, se  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ , allora  $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ha la seguente espressione:

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}.$$

Analogamente, se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ , allora  $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  agisce come segue:

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \end{pmatrix}.$$

**6.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  un numero intero, e sia  $V = \mathbb{R}[t]_n$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nella indeterminata  $t$ , di grado  $\leq n$ . Sia  $f: V \rightarrow V$  la funzione che associa ad ogni polinomio  $P \in V$  la sua derivata rispetto a  $t$ ,  $f(P) = P'$ , concretamente, se  $P = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ ,  $f(P) = a_1 + 2a_2t + \dots + na_nt^{n-1}$ . Tale funzione è lineare, quindi  $f \in \text{End}(\mathbb{R}[t]_n)$ .

**7.** Sia  $V = \mathbb{R}[t]_n$  come nell'esempio precedente, e siano  $a \leq b$  due numeri reali. La funzione  $\int_a^b: \mathbb{R}[t]_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \mapsto \int_a^b P(t)dt$  è un'applicazione lineare.

**Problema 1.** Trovare esplicitamente l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che corrisponde alla rotazione intorno all'asse  $\text{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  di un angolo di 30 gradi.

**Teorema 1** (di struttura per le applicazioni lineari). *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali sul campo  $K$ . Sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ , e siano  $w_1, \dots, w_n \in W$  vettori di  $W$ . Allora esiste un'unica applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$ , tale che  $f(v_i) = w_i$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$ .*

*Dim.* (Esistenza) Definiamo una funzione  $f: V \rightarrow W$  come segue: per ogni vettore  $v \in V$ , esso si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ ,  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  sono le coordinate di  $v$  rispetto alla base data; allora definiamo

$$f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in W.$$

Si verifica facilmente che tale  $f$  è lineare (esercizio) e, per definizione, si ha che  $f(v_i) = w_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

(Unicità) Siano  $f, g \in \text{Hom}(V, W)$  due applicazioni lineari che soddisfano la proprietà dell'enunciato,  $f(v_i) = w_i = g(v_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Dimostriamo che

$f = g$ , cioè che  $f(v) = g(v)$ ,  $\forall v \in V$ . A tale scopo, sia  $v \in V$  un vettore arbitrario. Scriviamo  $v$  come combinazione lineare dei vettori della base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , allora, sfruttando le proprietà (AL1) e (AL2) si ha:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \\ &= \lambda_1 g(v_1) + \dots + \lambda_n g(v_n) = g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = g(v). \end{aligned}$$

□

**Esempio 2.** Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ , allora l'applicazione lineare  $L_A: K^n \rightarrow K^m$  definita nell'Esempio 1.5. è l'unica applicazione lineare tale che  $L_A(e_i) = A^{(i)}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , dove  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è la base canonica di  $K^n$ , ed  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m$  sono le colonne di  $A$ .

Dal teorema di struttura segue che  $L_A = L_B \Leftrightarrow A = B$ .

## 2 Nucleo ed immagine

**Definizione 2.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su un campo  $K$ . Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Il **nucleo** di  $f$  è il sottoinsieme di  $V$  definito come segue:

$$\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

L'immagine di  $f$  è il sottoinsieme di  $W$  definito come segue:

$$\text{im}(f) := \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tale che } f(v) = w\}.$$

**Proposizione 1.** Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, allora valgono le seguenti affermazioni.

- (1)  $\ker(f)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
- (2)  $\text{im}(f)$  è un sottospazio vettoriale di  $W$ .
- (3)  $f$  è iniettiva  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$ .
- (4)  $f$  è suriettiva  $\Leftrightarrow \text{im}(f) = W$ .

*Dim.* (1) Dalla Osservazione 1.1. segue che il vettore nullo di  $V$  appartiene al nucleo di  $f$ , quindi  $\ker(f) \neq \emptyset$ . Siano ora  $v_1, v_2, v \in \ker(f)$  e sia  $a \in K$ . Siccome  $f$  è lineare, valgono le seguenti uguaglianze:  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$ ,  $f(av) = af(v) = a0 = 0$ . Da questo segue che  $v_1 + v_2, av \in \ker(f)$ , quindi  $\ker(f) \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale.

(2) Il vettore nullo di  $W$  appartiene all'immagine di  $f$ , poiché  $0 = f(0)$ , quindi  $\text{im}(f) \neq \emptyset$ . Siano ora  $w_1, w_2, w \in \text{im}(f)$  e sia  $a \in K$ . Per definizione di  $\text{im}(f)$ , esistono  $v_1, v_2, v \in V$ , tali che  $f(v_1) = w_1$ ,  $f(v_2) = w_2$  ed  $f(v) = w$ . Per la

linearità di  $f$  si ha:  $f(v_1+v_2) = w_1+w_2$ ,  $f(av) = aw$ . Quindi  $w_1+w_2, aw \in \text{im}(f)$ , da cui segue che  $\text{im}(f) \subseteq W$  è un sottospazio vettoriale.

(3) Ricordiamo che, per definizione, una funzione  $f$  è iniettiva se  $f(v) \neq f(w)$ ,  $\forall v \neq w$  appartenenti al dominio di  $f$ .

Dimostriamo ora l'enunciato. ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $f$  sia (lineare ed) iniettiva. Allora, per ogni  $v \neq 0$ ,  $f(v) \neq f(0) = 0$ , quindi  $v \notin \ker(f)$ , da cui segue che  $\ker(f) = \{0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Viceversa, supponiamo che  $\ker(f) = \{0\}$ . Siano  $v, w \in V$  vettori distinti,  $v \neq w$ , allora  $v - w \neq 0$ , quindi  $f(v - w) \neq 0$ . Per la linearità di  $f$ ,  $f(v - w) = f(v) - f(w) \neq 0$ , quindi  $f(v) \neq f(w)$ , cioè  $f$  è iniettiva.

(4) Questa affermazione vale per definizione di funzione suriettiva.  $\square$

**Definizione 3.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su un campo  $K$ , con  $W$  di dimensione finita. Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Il **rango** di  $f$  è la dimensione dell'immagine di  $f$  e si indica con  $\text{rg}(f)$ :

$$\text{rg}(f) := \dim(\text{im}(f)).$$

**Osservazione 2. 1.** Sia  $A \in \text{M}_{m,n}(K)$ , e sia  $L_A: K^n \rightarrow K^m$ ,  $L_A(v) = A \cdot v$ , l'applicazione lineare associata ad  $A$  (si veda l'Esempio 1.5.). Allora

$$\ker(L_A) = \{v \in K^n \mid L_A(v) = A \cdot v = 0\},$$

cioè  $\ker(L_A)$  è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo  $A \cdot x = 0$ .

Come conseguenza della Proposizione 2 del Capitolo 3 abbiamo che, se  $\tilde{A}$  è una matrice che si ottiene da  $A$  per mezzo di operazioni elementari, allora  $\ker(L_{\tilde{A}}) = \ker(L_A)$ .

**2.** Se  $f: V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , allora  $\text{im}(f) = \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ .

*Dim.* Chiaramente  $f(v_1), \dots, f(v_n) \in \text{im}(f)$ , quindi  $\text{im}(f) \supseteq \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ , poiché  $\text{im}(f)$  è uno spazio vettoriale.

Viceversa, sia  $w \in \text{im}(f)$ , allora esiste  $v \in V$ , tale che  $f(v) = w$ . Siccome  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , possiamo esprimere  $v$  come combinazione lineare dei vettori  $v_1, \dots, v_n$ ,  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ , con  $a_1, \dots, a_n \in K$ . Per la linearità di  $f$  si ha:  $w = f(v) = a_1f(v_1) + \dots + a_nf(v_n)$ . Quindi  $w \in \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ , da cui segue che  $\text{im}(f) \subseteq \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ . L'affermazione segue dalla doppia inclusione.  $\square$

**3.** Sia  $A \in \text{M}_{m,n}(K)$ , e sia  $L_A: K^n \rightarrow K^m$  l'applicazione lineare associata ad  $A$  (come nell'Esempio 1.5.). Come osservato nell'Esempio 2,  $L_A(e_i) = A^{(i)}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , quindi  $\text{im}(L_A) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$  ed in particolare  $\text{rg}(A) = \text{rg}(L_A)$ .

Osserviamo che se  $\tilde{A}$  si ottiene da  $A$  per mezzo di operazioni elementari, in generale  $\text{im}(L_{\tilde{A}}) \neq \text{im}(L_A)$ , anche se  $\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg}(A)$  (Proposizione 1, Capitolo 5). Si consideri ad esempio la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , allora  $\text{im}(L_A) = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Sostituendo la seconda riga di  $A$  con la sua differenza con la prima riga, si ottiene  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Quindi  $\text{im}(L_{\tilde{A}}) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \text{im}(L_A)$ .

**Esempio 3. 1.** Consideriamo l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 4y \\ 3x - 2y + 2z \\ 2z \end{pmatrix}$ . Per determinare il nucleo, l'immagine ed il rango di

$f$ , osserviamo che  $f = L_A$ , con  $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Trasformiamo  $A$  a scala per mezzo di operazioni elementari:

$$A \rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2$  ed una base di  $\text{im}(f)$  è formata dai vettori

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  (Proposizione 1.2. del Capitolo 5). (Osserviamo che anche in questo caso  $\text{im}(f) \neq \text{im}(L_{\tilde{A}})$ .) Per determinare il nucleo di  $f$ , risolviamo

il sistema lineare omogeneo  $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$  ed otteniamo:  $\ker(f) = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**2.** Sia  $f: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_3$  l'applicazione lineare che associa ad ogni polinomio  $P$  di grado  $\leq 3$  la sua derivata,  $f(P) = P'$ . Allora il nucleo di  $f$  è formato dai polinomi la cui derivata è nulla, quindi dalle costanti (polinomi di grado 0). In altre parole  $\ker(f) = \mathbb{R}[t]_0$  e quindi  $\dim(\ker(f)) = 1$ . Mentre  $\text{im}(f) = \mathbb{R}[t]_2$ , poiché, per ogni  $Q = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \in \mathbb{R}[t]_2$ ,  $f(b_0 t + \frac{1}{2} b_1 t^2 + \frac{1}{3} b_2 t^3) = Q$ .

**3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$  e sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Consideriamo l'applicazione lineare  $f_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n$  dell'Esempio 1.3. Poiché  $f_{\mathcal{B}}$  è un isomorfismo, essa è iniettiva e suriettiva, quindi  $\ker(f_{\mathcal{B}}) = \{0\}$  ed  $\text{im}(f_{\mathcal{B}}) = K^n$  (Proposizione 1).

**4.** Se  $V$  è somma diretta di due sottospazi  $U$  e  $W$ ,  $V = U \oplus W$ , consideriamo le proiezioni  $P_U, P_W: V \rightarrow V$  (Esempio 1.4.). Allora si verifica facilmente che  $\text{im}(P_U) = U$ ,  $\ker(P_U) = W$ ,  $\text{im}(P_W) = W$ ,  $\ker(P_W) = U$  (la verifica è lasciata per esercizio).

**Teorema 2** (della dimensione). *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su un campo  $K$ , con  $V$  di dimensione finita. Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f).$$

*Dim.* Poiché  $V$  ha dimensione finita e  $\ker(f)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ ,  $\dim(\ker(f)) < \infty$ . Fissiamo una base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  di  $\ker(f)$  e completiamola a base di  $V$ ,  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  (teorema del completamento, Proposizione 7, Capitolo 4). Dimostriamo ora che  $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$  è una base di  $\text{im}(f)$  ed osserviamo che da questo segue l'enunciato, perché  $\text{rg}(f) = n - k$  e  $\dim(V) = n = k + (n - k) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$ .

Dalla Osservazione 2.2. si ha che  $\text{im}(f) = \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$ , e siccome  $f(v_1) = \dots = f(v_k) = 0$ , segue che  $\text{im}(f) = \text{Span}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$ . Rimane quindi da dimostrare che  $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$  sono linearmente indipendenti. A tale scopo siano  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K$  tali che  $\lambda_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$ . Per la linearità di  $f$ ,  $\lambda_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_{k+1}v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) = 0$ . Quindi  $\lambda_{k+1}v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \ker(f)$ . Siccome  $\{v_1, \dots, v_k\}$  è una base di  $\ker(f)$ , esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ , tali che  $\lambda_{k+1}v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ , da cui segue che  $\lambda_{k+1}v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n - \lambda_1v_1 - \dots - \lambda_k v_k = 0$ , e siccome  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti, gli scalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  devono essere necessariamente tutti nulli.  $\square$

**Osservazione 3.** Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Ricordiamo che, per ogni vettore  $w \in W$ ,  $f^{-1}(w)$  denota la pre-immagine di  $w$  tramite  $f$ , cioè

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}.$$

Osserviamo che,  $f^{-1}(w) \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in \text{im}(f)$ . In tal caso si ha che

$$f^{-1}(w) = \tilde{v} + \ker(f),$$

dove  $\tilde{v}$  è un qualsiasi elemento di  $f^{-1}(w)$ . Questo segue, ad esempio, tramite una dimostrazione analoga a quella del teorema di struttura per le soluzioni di un sistema lineare (la verifica è lasciata come esercizio). Dal teorema della dimensione si ha che  $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \text{rg}(f)$ . Si osservi che in questo modo, nel caso in cui  $V = K^n$ ,  $W = K^m$ ,  $f = L_A$ , per qualche  $A \in M_{m,n}(K)$ , si ritrova il teorema di struttura per le soluzioni di un sistema lineare ed il teorema di Rouché-Capelli.

Il seguente risultato segue immediatamente dal Teorema della dimensione ed è stato utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 1 del Capitolo 5.

**Corollario 1.** *Sia  $A \in M_{m,n}(K)$  e sia  $W = \{v \in K^n \mid A \cdot v = 0\}$  lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo  $A \cdot x = 0$ . Allora*

$$n = \dim(W) + \text{rg}(A).$$

**Corollario 2.** *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo  $K$ . Supponiamo che  $\dim(V) = \dim(W)$ . Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1.  $\ker(f) = \{0\}$  (cioè  $f$  è iniettiva).

2.  $\text{im}(f) = W$  (cioè  $f$  è suriettiva).

3.  $f$  è un isomorfismo.

*Dim.*  $\ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 0$ . Per il Teorema della dimensione,  $\dim(\ker(f)) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{im}(f)) = \dim(V)$ . Per ipotesi  $\dim(V) = \dim(W)$ , ne segue che  $\ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{im}(f)) = \dim(W)$ , poiché  $\text{im}(f)$  è un sottospazio vettoriale di  $W$  quest'ultima condizione è equivalente a  $\text{im}(f) = W$ . Quindi 1. e 2. sono equivalenti tra di loro.

Supponiamo ora che valga la condizione 2. (oppure la 1.). Per quanto appena dimostrato vale anche la condizione 1. (rispettivamente la 2.), quindi  $f$  è un isomorfismo. Viceversa, se  $f$  è un isomorfismo, è iniettiva e suriettiva per definizione, quindi valgono 1. e 2.  $\square$

**Definizione 4.** Due spazi vettoriali  $V$  e  $W$  sul campo  $K$  si dicono **isomorfi**, se esiste un isomorfismo  $f: V \rightarrow W$ . In tal caso si scrive  $V \cong W$ .

**Osservazione 4.** L'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra gli spazi vettoriali su uno stesso campo  $K$ .

Vale il seguente teorema.

**Teorema 3.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo  $K$ . Allora  $V \cong W \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$ .

*Dim.* ( $\Rightarrow$ ) Sia  $f: V \rightarrow W$  un isomorfismo. Per il precedente corollario,  $\ker(f) = \{0\}$  ed  $\text{im}(f) = W$ , quindi per il teorema della dimensione  $\dim(V) = \text{rg}(f) = \dim(W)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo ora che  $\dim(V) = \dim(W) = n$ . Fissiamo una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  ed una base  $\{w_1, \dots, w_n\}$  di  $W$ . Per il teorema di struttura per le applicazioni lineari esiste un'unica applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tale che  $f(v_i) = w_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Per l'Osservazione 2.2.  $\text{im}(f) = \text{Span}(w_1, \dots, w_n) = W$ , quindi  $f$  è suriettiva. Dal precedente corollario abbiamo che  $f$  è un isomorfismo, quindi  $V \cong W$ .  $\square$

### 3 Applicazioni lineari e matrici

Nell'Esempio 1.5. abbiamo visto che ad ogni matrice  $A \in M_{m,n}(K)$  corrisponde un'applicazione lineare  $L_A: K^n \rightarrow K^m$ ,  $L_A(v) = A \cdot v$ . In questa sezione vedremo che, viceversa, data un'applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tra spazi vettoriali di dimensione finita, fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  ed una base  $\mathcal{C}$  di  $W$ , possiamo associare ad  $f$  una matrice  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  (la matrice che rappresenta  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ ) tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 \uparrow f_{\mathcal{B}}^{-1} & & \downarrow f_{\mathcal{C}} \\
 K^n & \xrightarrow{L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}} & K^m
 \end{array} \tag{1}$$

dove  $n = \dim(V)$ ,  $m = \dim(W)$ ,  $f_{\mathcal{B}}$  ed  $f_{\mathcal{C}}$  sono gli isomorfismi associati alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  come nell'Esempio 1.3. Il fatto che il diagramma (1) sia commutativo significa che, per ogni  $\lambda \in K^n$ ,

$$f_{\mathcal{C}}(f(f_{\mathcal{B}}^{-1}(\lambda))) = L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}(\lambda).$$

In altre parole, per ogni  $v \in V$ , se  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$  sono le coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , allora le coordinate di  $f(v)$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  sono (Prop. 2)

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Definizione 5.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali di dimensione finita su  $K$ . Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base di  $W$ . La **matrice che rappresenta**  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  è definita come segue:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K),$$

dove, per ogni  $j = 1, \dots, n$ ,  $f(v_j) = a_{1j}w_1 + \dots + a_{mj}w_m$ . In altre parole, la colonna  $j$ -ma di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  è formata dalle coordinate di  $f(v_j)$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ .

**Osservazione 5. 1.** Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ , consideriamo l'applicazione lineare  $L_A: K^n \rightarrow K^m$ . Siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  le basi canoniche di  $K^n$  e  $K^m$ , rispettivamente. Allora  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L_A) = A$ . Infatti, se  $e_j$  denota il  $j$ -mo vettore della base canonica di  $K^n$ , allora  $L_A(e_j) = A \cdot e_j = A^{(j)}$ , e le coordinate di  $A^{(j)}$  rispetto alla base canonica di  $K^m$  sono  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ , dove  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ .

**2.** Sia  $f$  l'applicazione nulla (Esempio 1.1.), allora  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = 0$  per ogni scelta di  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Infatti  $f(v_j) = 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ , e le coordinate del vettore nullo sono  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**3.** Se  $V = W$  ed  $f = \text{Id}_V$ , allora  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = I_n$  per ogni base  $\mathcal{B}$  di  $V$ . Infatti, per ogni  $j = 1, \dots, n$ ,  $\text{Id}_V(v_j) = v_j$ , e le coordinate di  $v_j$  rispetto alla base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  coincidono con il  $j$ -mo vettore della base canonica di  $K^n$ ,  $e_j$ .

Più in generale, se  $V = W$  e  $f = \lambda \text{Id}_V$  per qualche scalare  $\lambda \in K$ , allora  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\lambda \text{Id}_V) = \lambda I_n$  (la verifica è lasciata per esercizio).

Osserviamo che, se  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ , allora  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \neq I_n$  (la verifica è lasciata per esercizio).

**Proposizione 2.** *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $K$  di dimensione finita, sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, e siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ ,  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base di  $W$ . Dato un vettore  $v \in V$ , se  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , allora  $f(v) = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$ , dove*

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*Dim.* L'enunciato segue dalla seguente sequenza di uguaglianze, dove si sfrutta il fatto che  $f$  è lineare e la definizione di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ :

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \\ &= \lambda_1 (a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + \lambda_n (a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n}) w_1 + \dots + (\lambda_1 a_{m1} + \dots + \lambda_n a_{mn}) w_m. \end{aligned}$$

Osserviamo che, per ogni  $i = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_n a_{in}$  è l' $i$ -ma componente del vettore  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^m$ .  $\square$

Uno dei vantaggi che si ottengono descrivendo un'applicazione lineare  $f$  per mezzo delle matrici  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  è che possiamo usare i risultati dei capitoli 3 e 5 per determinare  $\text{im}(f)$  e  $\ker(f)$ , come segue.

**Corollario 3.** *Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare, dove  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali di dimensione finita. Siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  una base di  $W$ . Sia  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  la matrice che rappresenta  $f$  nelle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Allora valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V \mid M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \right\}; \\ \text{im}(f) &= \left\{ \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m \in W \mid \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \text{im}(L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}) \right\}; \\ \text{rg}(f) &= \text{rg}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)). \end{aligned}$$

*Dim.* La prima uguaglianza segue dal fatto che se  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , allora  $f(v) = 0$  se e soltanto se le coordinate di  $f(v)$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  sono tutte  $= 0$ . Dalla precedente proposizione questo è equivalente a richiedere che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$ . La seconda uguaglianza segue analogamente.

Dimostriamo ora l'ultima uguaglianza. Osserviamo che per la seconda uguaglianza, la restrizione di  $f_{\mathcal{C}}: W \rightarrow K^m$  all'immagine di  $f$  è un isomorfismo da  $\text{im}(f)$  a  $\text{im}(L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)})$ . Quindi  $\text{rg}(f) = \dim(\text{im}(f)) = \dim(\text{im}(L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)})) = \text{rg}(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f))$ .  $\square$

**Esempio 4. 1.** Siano  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $W = \mathbb{R}^3$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x \\ x + y \end{pmatrix}. \quad \text{Sia } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ la base canonica di } \mathbb{R}^2 \text{ e sia}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ la base canonica di } \mathbb{R}^3. \quad \text{Determiniamo la matrice}$$

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ . Per definizione,  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ , la prima colonna (rispettivamente

$$\text{la seconda}) \text{ è formata dalle coordinate di } f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (rispettivamente di}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ rispetto alla base } \mathcal{C}. \quad \text{Quindi}$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}).$$

In particolare  $\text{rg}(f) = 2$ ,  $\text{ker}(f) = \{0\}$  (per il teorema della dimensione), e

$$\text{im}(f) = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**2.** Consideriamo ora la stessa applicazione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  del precedente esempio.

$$\text{Scegliamo le basi } \tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^2, \text{ e } \tilde{\mathcal{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^3$$

e determiniamo  $M_{\tilde{\mathcal{C}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(f) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ . A tale scopo determiniamo le coordinate di

$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ed  $f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  rispetto alla base  $\tilde{\mathcal{C}}$ :

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla Definizione 5 segue che  $M_{\tilde{\mathcal{C}}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**3.** Siano  $V = \mathbb{R}[t]_3$ ,  $W = \mathbb{R}[t]_2$ , ed  $f: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$ ,  $f(P) = P'$ , la derivata di  $P$  rispetto a  $t$ . Scegliamo le basi  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$  di  $\mathbb{R}[t]_3$  e  $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$  di  $\mathbb{R}[t]_2$ . La matrice  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_{3,4}(\mathbb{R})$  ha come prima colonna (rispettivamente seconda, terza, quarta) le coordinate di  $f(1)$  (rispettivamente  $f(t)$ ,  $f(t^2)$ ,  $f(t^3)$ ) rispetto alla base  $\mathcal{C}$ . Siccome  $f(1) = 0$ ,  $f(t) = 1$ ,  $f(t^2) = 2t$  ed  $f(t^3) = 3t^2$ , abbiamo che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha che  $\ker(L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ed  $\text{im}(L_{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}) = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ,

quindi  $\ker(f) = \text{Span}(1)$  ed  $\text{im}(f) = \text{Span}(1, t, t^2) = \mathbb{R}[t]_2$ .

**4.** Siano  $V = W = \mathbb{R}[t]_3$ , e sia  $f: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_3$ ,  $f(P) = tP'$ , dove  $P'$  è la derivata di  $P$  rispetto a  $t$ . Si verifica facilmente che  $f$  è lineare (esercizio). Consideriamo la base  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$  di  $\mathbb{R}[t]_3$ , e determiniamo  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_4(\mathbb{R})$ . Abbiamo che:  $f(1) = 0$ ,  $f(t) = t$ ,  $f(t^2) = 2t^2$  ed  $f(t^3) = 3t^3$ . Per definizione, la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  ha per colonne le coordinate, rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , dei vettori  $f(1) = 0$ ,  $f(t) = t$ ,  $f(t^2) = 2t^2$  ed  $f(t^3) = 3t^3$ , quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per determinare  $\ker(f)$  ed  $\text{im}(f)$ , determiniamo prima  $\ker(L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)})$  ed  $\text{im}(L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)})$ .

Usando i risultati dei capitoli 3 e 5 abbiamo che  $\ker(L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ed

$\text{im}(L_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . Quindi  $\ker(f) = \text{Span}(1), \text{im}(f) = \text{Span}(t, t^2, t^3) \subset \mathbb{R}[t]_3$ .

5. Consideriamo l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + \pi z \\ x - y + \sqrt{2}z \\ y + z \end{pmatrix}$ .

Si vuole determinare  $\ker(f)$  e  $\text{rg}(f)$ . Sia quindi  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Abbiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \pi \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcola che  $\text{rg}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = 3$ , quindi  $\text{rg}(f) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = 3$  e per il teorema della dimensione  $\ker(f) = \{0\}$ .

**Teorema 4.** *Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo  $K$ . Siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  basi di  $V$  e  $W$ , rispettivamente. Allora l'applicazione*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}: \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(K), \quad f \mapsto M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f),$$

*è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare  $\text{Hom}(V, W)$  ha dimensione finita pari a  $n \cdot m = \dim(V) \cdot \dim(W)$ .*

*Dim.* Dimostriamo dapprima che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  è lineare. Siano  $f, g \in \text{Hom}(V, W)$  e sia  $c \in K$ . Denotiamo con  $a_{ij}$  (rispettivamente  $b_{ij}$ ) l'elemento di posto  $(i, j)$  di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  (rispettivamente di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g)$ ). Dobbiamo verificare che l'elemento di posto  $(i, j)$  di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g)$  coincide con  $a_{ij} + b_{ij}$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Per definizione,  $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g)]_{ij}$  è la coordinata  $i$ -ma di  $(f + g)(v_j)$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ . Abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} (f + g)(v_j) &= f(v_j) + g(v_j) \\ &= (a_{1j}w_1 + \dots + a_{mj}w_m) + (b_{1j}w_1 + \dots + b_{mj}w_m) \\ &= (a_{1j} + b_{1j})w_1 + \dots + (a_{mj} + b_{mj})w_m. \end{aligned}$$

Da questo segue che  $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g)]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)]_{ij} + [M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g)]_{ij}$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , quindi  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g)$ .

Analogamente si dimostra che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(cf) = cM_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ , quindi  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  è lineare.

Per dimostrare che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  è iniettiva, è sufficiente provare che  $\ker(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}) = \{0\}$  (Proposizione 1). Sia quindi  $f \in \text{Hom}(V, W)$  tale che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = 0 \in M_{m,n}(K)$ . Sfruttando la Proposizione 2, si ha che  $f = 0$ , da cui segue la tesi.

Per concludere, dimostriamo che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  è suriettiva. Sia quindi  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ . Definiamo  $f_A \in \text{Hom}(V, W)$  come quell'applicazione lineare tale che  $f_A(v_j) = a_{1j}w_1 + \dots + a_{mj}w_m$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$  (dal Teorema di struttura per le applicazioni lineari una tale funzione esiste ed è unica). Per definizione si ha che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$ , quindi  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  è suriettiva.  $\square$

**Osservazione 6.** Dalla dimostrazione del precedente teorema segue che la funzione inversa di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  è quella funzione  $M_{m,n}(K) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$  che associa  $A \mapsto f_A, \forall A \in M_{m,n}(K)$ .

### 3.1 Cambiamenti di base

In questa sezione vedremo come cambia la matrice  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  al variare delle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Questo seguirà dalla seguente proposizione.

**Proposizione 3.** *Siano  $U, V$  e  $W$  tre spazi vettoriali sul campo  $K$ , di dimensione  $p, n, m$ , rispettivamente. Siano*

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{u_1, \dots, u_p\} \text{ una base di } U, \\ \mathcal{B} &= \{v_1, \dots, v_n\} \text{ una base di } V, \\ \mathcal{C} &= \{w_1, \dots, w_m\} \text{ una base di } W.\end{aligned}$$

*Siano  $g: U \rightarrow V$  e  $f: V \rightarrow W$  applicazioni lineari. Allora*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g).$$

*Dim.* Dobbiamo dimostrare che, per ogni  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $j = 1, \dots, p$ , vale la seguente uguaglianza:

$$[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f \circ g)]_{ij} = \sum_{k=1}^n [M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)]_{ik} \cdot [M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g)]_{kj}.$$

Denotiamo con  $a_{ik} = [M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)]_{ik}$  e con  $b_{kj} = [M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g)]_{kj}$ , e ricordiamo che  $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f \circ g)]_{ij}$  è la  $i$ -ma coordinata rispetto a  $\mathcal{C}$  di  $(f \circ g)(u_j)$ .

Dalla definizione di composizione di due applicazioni, dalla linearità di  $f$  e  $g$ , e dalla Definizione 5 si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u_j) &= f(g(u_j)) = f\left(\sum_{k=1}^n b_{kj}v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj}f(v_k) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj}\left(\sum_{\ell=1}^m a_{\ell k}w_{\ell}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m b_{kj}a_{\ell k}w_{\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}a_{\ell k}\right)w_{\ell}.\end{aligned}$$

Da questo segue che la  $i$ -ma coordinata di  $(f \circ g)(u_j)$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  è  $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ .  $\square$

**Corollario 4.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$ . Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1. *Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora  $f$  è un automorfismo  $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  è invertibile. In tal caso  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^{-1}$ .*
2. *(Si confronti con il Teorema 3 del Capitolo 5.) Sia  $A \in M_n(K)$ . Allora  $A$  è invertibile  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$ .*

*Dim.* 1.  $(\Rightarrow)$  Supponiamo che  $f \in \text{End}(V)$  sia un automorfismo, e sia  $f^{-1}$  la funzione inversa di  $f$  (che è lineare per l'Osservazione 1.4.). Allora valgono le uguaglianze  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_V$ . Per l'Osservazione 5.3. si ha che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = I_n$ , e dalla Proposizione 3 segue che  $I_n = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ . Da cui segue l'enunciato.

$(\Leftarrow)$  Viceversa, se  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  è invertibile, allora l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot x = 0$  è  $x = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^{-1} \cdot 0 = 0$ . Dal Corollario 3 segue che  $\ker(f) = \{0\}$  e dal Corollario 2 che  $f$  è un isomorfismo.

2. Consideriamo l'applicazione lineare  $L_A: K^n \rightarrow K^n$  e ricordiamo che  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A)$ , dove  $\mathcal{B}$  è la base canonica di  $K^n$ . Dal punto 1. si ha che  $A \in \text{GL}_n(K) \Leftrightarrow L_A$  è un isomorfismo. Per il Corollario 2,  $L_A$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow \text{rg}(L_A) = n$ . L'enunciato segue dal fatto che  $\text{rg}(L_A) = \text{rg}(A)$  (Osservazione 2.3., Corollario 3).  $\square$

**Definizione 6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$ . Siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$  due basi di  $V$ . La **matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$**  è la matrice  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \in M_n(K)$  che rappresenta la funzione identità  $\text{Id}_V: V \rightarrow V$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ .*

**Osservazione 7. 1.** Per ogni  $j = 1, \dots, n$ , siano  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  le coordinate di  $v_j = \text{Id}_V(v_j)$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  (cioè  $v_j = a_{1j}w_1 + \dots + a_{nj}w_n$ ), allora dalla Definizione 5 segue che,

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**2.** Dalla Proposizione 2 abbiamo che, per ogni vettore  $v \in V$ , se  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$

sono le coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , allora le coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  sono

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Quindi  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$  permette di determinare le coordinate di un vettore rispetto alla base  $\mathcal{C}$  se sono note le sue coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$ , per questo prende il nome di matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ .

**Proposizione 4.**  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$  è invertibile, inoltre vale la seguente uguaglianza  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$ .

*Dim.* Valgono le seguenti identità:

$$\begin{array}{ccc} I_n & \xrightarrow{\text{Oss.5.3.}} & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \\ \text{Id}_V = \text{Id}_V \circ \text{Id}_V & \xrightarrow{\quad} & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V \circ \text{Id}_V) \xrightarrow{\text{Prop.3}} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V). \end{array}$$

Analogamente si dimostra che  $I_n = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$ . Da questo segue l'enunciato.  $\square$

Come corollario della Proposizione 3 abbiamo il seguente risultato che esprime  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$  in termini di  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  e delle matrici del cambiamento di base.

**Corollario 5.** Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi di  $V$  e  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  due basi di  $W$ . Allora

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_W) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V). \quad (2)$$

In particolare, se  $V = W$ ,

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V))^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V). \quad (3)$$

*Dim.* Applicando la Proposizione 3 al prodotto  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  abbiamo:  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(f \circ \text{Id}_V) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(f)$ . Applicando di nuovo la Proposizione 3 abbiamo che:

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_W) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_W) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_W \circ f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f),$$

da cui segue la prima uguaglianza dell'enunciato.

L'uguaglianza (3) segue dalla precedente e dal fatto che  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V))^{-1}$  (Proposizione 4).  $\square$

**Esempio 5. 1.** Sia  $V = \mathbb{R}^2$ . Consideriamo le basi  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Allora, poiché  $\mathcal{B}$  è la base canonica,  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Per la Proposizione 4,

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

In particolare le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix}$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  sono

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 21 \\ -\sqrt{2} - 14 \end{pmatrix}.$$

**2.** Sia  $V = M_2(\mathbb{C})$  lo spazio vettoriale delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti in  $\mathbb{C}$ . Consideriamo le seguenti basi di  $V$ :  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  e  $\mathcal{C} = \left\{ I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ . Allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_{M_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{M_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

In particolare, le coordinate della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$  sono

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{i}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

**3.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ . Si verifica facilmente che  $f$  è lineare (la verifica è lasciata per esercizio). Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathcal{C}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Allora

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare  $\ker(f)$  e  $\text{rg}(f)$ , trasformiamo  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  a scala per mezzo di operazioni elementari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi  $\text{rg}(f) = 3$  e  $\dim(\ker(f)) = 4 - 3 = 1$ . Siccome le operazioni elementari trasformano un sistema lineare in uno equivalente,

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_2 = -x_4, x_1 = -2x_4 \right\} = \text{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora le basi  $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  di  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathcal{C}' =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  di  $\mathbb{R}^3$ . Vogliamo determinare la matrice  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ . Dalla

Definizione 5, se  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ , allora

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{24} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{34} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo le precedenti equazioni otteniamo:

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora la matrice  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$  usando l'uguaglianza (2), cioè

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^4}).$$

È immediato determinare le matrici  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^4})$  ed  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ :

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dalla Proposizione 4 abbiamo:

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando le precedenti matrici come nella formula (2), si ottiene la matrice  $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ .

4. Sia  $V = \mathbb{R}[t]_2$  e sia  $f: V \rightarrow V$  la funzione che associa ad ogni polinomio  $P$  di grado  $\leq 2$  la sua derivata rispetto a  $t$ ,  $f(P) = P'$ . Consideriamo le seguenti basi di  $V$ :  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ ,  $\mathcal{C} = \{1, t+1, t^2-t\}$ . Abbiamo che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Inoltre

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ quindi } M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla (3) segue che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.2 Cambiamenti di coordinate affini

In questa sezione applichiamo i risultati delle precedenti sezioni per determinare la formula di trasformazione delle coordinate affini rispetto a due riferimenti.

Sia  $\mathbb{A}$  uno spazio affine sullo spazio vettoriale  $V$  sul campo  $K$ . Consideriamo due sistemi di coordinate affini  $O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  ed  $O', \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$  di

$\mathbb{A}$ . Sia  $P \in \mathbb{A}$  e siano  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  le sue coordinate rispetto ad  $O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,

vogliamo determinare le sue coordinate  $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$  rispetto ad  $O', \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ .

Ricordiamo che, per definizione di coordinate in uno spazio affine,

$$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n,$$

ed analogamente

$$\overrightarrow{O'P} = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n.$$

Usando l'uguaglianza  $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$ , otteniamo  $\overrightarrow{O'P} - \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{OP}$ . Quindi,

se  $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  sono le coordinate di  $O$  rispetto ad  $O', \{w_1, \dots, w_n\}$ , si ha che

$$(\mu_1 - c_1)w_1 + \dots + (\mu_n - c_n)w_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Dalla Osservazione 7.2. abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - c_1 \\ \vdots \\ \mu_n - c_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

**Esempio 6.** Consideriamo il piano affine  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  con il riferimento canonico  $O', \mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ . Sia  $O = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , e sia  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Allora  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Per ogni punto  $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , se  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$  sono le sue coordinate rispetto ad  $O, \mathcal{B}$ , le sue coordinate rispetto ad  $O', \mathcal{C}$  sono date dalla formula

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

## 4 Diagonalizzazione

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  sul campo  $K$ , e sia  $f \in \text{End}(V)$ . Abbiamo visto che, scelta una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , possiamo rappresentare  $f$  per mezzo di una matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  (Definizione 5, Proposizione 2). Molte proprietà di  $f$  possono essere studiate tramite la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  (si veda ad esempio i corollari 3, 4). L'obiettivo di questa sezione è di stabilire se, data  $f$ , esiste una base di  $V$  tale che la matrice che rappresenta  $f$  rispetto a tale base sia diagonale.

Ricordiamo che, se  $\mathcal{C}$  è un'altra base di  $V$ , allora le matrici  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$  ed  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  sono collegate dalla formula (3):

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V))^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V),$$

dove  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$  è la matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$ . Dalla Proposizione 4 abbiamo che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$  è invertibile. Questo motiva la seguente definizione.

**Definizione 7.** Due matrici  $A, B \in M_n(K)$  sono **simili** se esiste  $C \in \text{GL}_n(K)$  tale che

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

In tal caso si scrive  $A \sim B$ .

Quindi, per la (3), se due matrici rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a due basi, allora esse sono simili. Vale anche il viceversa, come afferma il seguente risultato.

**Lemma 1.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  e sia  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_n(K)$ , dove  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ . Per ogni  $B \in M_n(K)$ ,  $A \sim B \Leftrightarrow \exists \mathcal{C}$  base di  $V$  tale che  $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ .

*Dim.* L'implicazione  $\Leftarrow$  segue dall'equazione (3). Viceversa, supponiamo che  $A \sim B$ . Allora per definizione,  $\exists C \in \text{GL}_n(K)$  tale che  $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ . Sia  $c_{ij}$  l'elemento di posto  $(i, j)$  di  $C$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ . Definiamo una base  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$  di  $V$  come segue:  $w_j := c_{1j}v_1 + \dots + c_{nj}v_n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Osserviamo che  $C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$ , quindi  $B = C^{-1} \cdot A \cdot C = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ .  $\square$

**Osservazione 8. 1.** La similitudine è una relazione di equivalenza tra le matrici a coefficienti in  $K$ . Infatti,  $\forall A \in M_n(K)$ ,  $A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n \Rightarrow A \sim A$ , quindi  $\sim$  è riflessiva. La proprietà simmetrica si dimostra come segue:  $A \sim B \Rightarrow \exists C \in \text{GL}_n(K)$  tale che  $B = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow A = C \cdot B \cdot C^{-1} = (C^{-1})^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1})$ , quindi  $B \sim A$  poiché  $C^{-1} \in \text{GL}_n(K)$ . Per concludere, dimostriamo la proprietà transitiva: se  $A \sim B$  e  $B \sim C$ , allora  $\exists D, E \in \text{GL}_n(K)$  tali che  $B = D^{-1} \cdot A \cdot D$  e  $C = E^{-1} \cdot B \cdot E$ , quindi  $C = E^{-1} \cdot D^{-1} \cdot A \cdot D \cdot E = (D \cdot E)^{-1} \cdot A \cdot (D \cdot E)$ , cioè  $A \sim C$ .

**Lemma 2.** Siano  $A, B \in M_n(K)$ . Se  $A \sim B$ , allora  $\det(A) = \det(B)$ .

*Dim.*  $A \sim B \Rightarrow \exists C \in \text{GL}_n(K)$  tale che  $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ . Quindi  $\det(B) = \det(C^{-1} \cdot A \cdot C) \stackrel{\text{(Binet)}}{=} \det(C^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(C) \stackrel{\text{Cor.4Cap.6}}{=} \frac{1}{\det(C)} \cdot \det(A) \cdot \det(C) = \det(A)$ .  $\square$

Questo risultato ci permette di definire il determinante di un endomorfismo come segue.

**Definizione 8.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora  $\det(f) := \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$ , dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ . Osserviamo che, per il Lemma 2,  $\det(f)$  non dipende dalla scelta della base  $\mathcal{B}$ , quindi la definizione è ben posta.

**Definizione 9.**

1. Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  sul campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora  $f$  si dice **diagonalizzabile** se esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  tale che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale (Definizione 2 del Capitolo 2). In tal caso,  $\mathcal{B}$  è detta **base di  $V$  che diagonalizza  $f$** .
2. Una matrice  $A \in M_n(K)$  è detta **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale.

**Osservazione 9. 1.** Sia  $A \in M_n(K)$ . Allora  $A$  è diagonalizzabile, se e solo se l'endomorfismo  $L_A: K^n \rightarrow K^n$  è diagonalizzabile. Questo segue dal fatto che  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A)$ , dove  $\mathcal{B}$  è la base canonica di  $K^n$  (Osservazione 5.1.), e dal Lemma 1.

**2.** Se  $\dim(V) = 1$ , allora ogni endomorfismo  $f \in \text{End}(V)$  è diagonalizzabile ed ogni base di  $V$  diagonalizza  $f$ .

Infatti, sia  $\mathcal{B} = \{v\}$ , allora  $f(v) = \lambda v$  per qualche  $\lambda \in K$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = (\lambda) \in M_1(K)$ , che è diagonale.

**3.** Vedremo che, se  $\dim(V) > 1$ , allora esistono endomorfismi  $f \in \text{End}(V)$  che non sono diagonalizzabili. In altre parole, se  $n > 1$ , esistono matrici  $A \in M_n(K)$

$$\text{non diagonalizzabili, ad esempio } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il seguente risultato è una riformulazione della Definizione 9 che motiva le definizioni che seguono.

**Lemma 3.** *Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  che diagonalizza  $f$ . Allora, per ogni  $i = 1, \dots, n$ ,  $f(v_i) = \lambda_i v_i$ , per qualche  $\lambda_i \in K$ .*

*Viceversa, se esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  con tali proprietà, allora  $f$  è diagonalizzabile e  $\mathcal{B}$  diagonalizza  $f$ .*

*Dim.* Per definizione abbiamo che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale. Quindi, se denotiamo con  $a_{ij}$  l'elemento di posto  $(i, j)$  di  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ , per la Definizione 5 si ha che  $f(v_j) = a_{jj}v_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Quindi basta porre  $\lambda_j = a_{jj}$ , per  $j = 1, \dots, n$ .

Viceversa, se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  tale che  $f(v_j) = \lambda_j v_j$ , per ogni  $j = 1, \dots, n$ , allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(K),$$

che è diagonale, quindi  $f$  è diagonalizzabile e  $\mathcal{B}$  diagonalizza  $f$ .  $\square$

**Definizione 10.** *1. Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Un **autovettore** di  $f$  è un vettore  $v \in V$  diverso dal vettore nullo,  $v \neq 0$ , tale che  $\exists \lambda \in K$  per cui vale:  $f(v) = \lambda v$ .*

*In tal caso,  $\lambda$  è l'**autovalore** di  $f$  relativo all'autovettore  $v$ .*

*Lo **spettro** di  $f$  è l'insieme degli autovalori di  $f$ , esso si denota con  $\text{Sp}(f)$  ed è un sottoinsieme del campo  $K$ .*

*2. Sia  $A \in M_n(K)$ . Un autovettore di  $A$  è un vettore  $v \in K^n$  non nullo tale che  $v$  sia un autovettore di  $L_A$ , cioè tale che  $A \cdot v = \lambda v$ , per qualche  $\lambda \in K$ . In tal caso,  $\lambda$  è l'autovalore di  $A$  relativo all'autovettore  $v$ . Lo spettro di  $A$  si definisce come l'insieme degli autovalori di  $A$  e si indica con  $\text{Sp}(A)$ .*

**Osservazione 10. 1.** Se  $f = \text{Id}_V$ , allora ogni vettore  $v \in V \setminus \{0\}$  è un autovettore di  $f$ , con autovalore corrispondente  $\lambda = 1$ .

Viceversa, se  $f \in \text{End}(V)$  è tale che,  $\forall v \in V \setminus \{0\}$ ,  $v$  è autovettore di  $f$  con autovalore 1, allora  $f = \text{Id}_V$  (la verifica è lasciata per esercizio).

**2.**  $0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \ker(f) \neq \{0\}$  (la verifica è lasciata per esercizio).

La seguente proposizione è una riformulazione del Lemma 3.

**Proposizione 5.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora  $f$  è diagonalizzabile  $\Leftrightarrow$  esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  composta da autovettori.*

La seguente proposizione contiene le principali proprietà degli autovettori ed autovalori.

**Proposizione 6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ , sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *Se  $v \in V$  è un autovettore di  $f$ , allora l'autovalore corrispondente a  $v$  è unico.*
2. *Siano  $v_1, \dots, v_m \in V$  autovettori di  $f$  con relativi autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ , rispettivamente. Se  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , per ogni  $i \neq j \in \{1, \dots, m\}$ , allora  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente indipendenti.*
3. *Sia  $\lambda \in \text{Sp}(f)$  un autovalore di  $f$ . Allora l'insieme*

$$\begin{aligned} V_\lambda(f) &:= \{v \in V \mid v \text{ è un autovettore di } f \text{ con autovalore } \lambda\} \cup \{0\} \\ &= \ker(f - \lambda \text{Id}_V), \end{aligned}$$

*è un sottospazio vettoriale di  $V$ , chiamato l'**autospazio di  $f$  relativo all'autovalore  $\lambda$** . In seguito, se non ci sarà pericolo di confusione,  $V_\lambda(f)$  verrà denotato con  $V_\lambda$ .*

*Dim.* 1. Supponiamo per assurdo che esistono due autovalori distinti  $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}(f)$  relativi all'autovettore  $v$ . Allora  $\lambda v = f(v) = \mu v$ , quindi  $0 = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu)v$ . Siccome  $v$  è un autovettore,  $v \neq 0$ , quindi  $\lambda - \mu = 0$ , cioè  $\lambda = \mu$ . Questo contraddice l'ipotesi  $\lambda \neq \mu$ , da cui segue l'enunciato.

2. Procediamo per induzione su  $m$ . Se  $m = 1$ , allora  $v_1$  è linearmente indipendente. Infatti per definizione di autovettore,  $v_1 \neq 0$ .

$m - 1 \Rightarrow m$  Siano  $c_1, \dots, c_m \in K$  scalari tali che  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$ . Allora:

$$0 = f(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m. \quad (5)$$

D'altro canto, moltiplicando ambo i membri di  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$  per  $\lambda_m$ , si ottiene

$$\lambda_m c_1 v_1 + \dots + \lambda_m c_m v_m = 0. \quad (6)$$

Sottraendo l'equazione (6) alla (5) otteniamo:  $c_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \dots + c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0$ . Per ipotesi induttiva,  $v_1, \dots, v_{m-1}$  sono linearmente indipendenti, quindi  $c_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \dots = c_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$ . Poiché  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , se  $i \neq j$ , segue che  $c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$ . Ma questo implica che  $c_m v_m = 0$ , quindi anche  $c_m = 0$ , da cui segue che  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente indipendenti.

3. Osserviamo che  $V_\lambda(f) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ , poiché  $f(0) = 0 = \lambda 0$ . Inoltre  $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}_V)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(f - \lambda \text{Id}_V)$ . Siccome  $f - \lambda \text{Id}_V \in \text{End}(V)$ ,  $\ker(f - \lambda \text{Id}_V)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  (Proposizione 1).  $\square$

**Corollario 6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  sul campo  $K$ , sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora  $f$  ha al più  $n$  autovalori distinti.*

*Dim.* Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \text{Sp}(f)$  autovalori distinti di  $f$ . Per ogni  $i = 1, \dots, m$ , sia  $v_i$  un autovettore di  $f$  relativo all'autovalore  $\lambda_i$ . Per il punto 2. della precedente proposizione,  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente indipendenti, quindi  $m \leq \dim(V) = n$ .  $\square$

**Teorema 5.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  sul campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$  e sia  $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  lo spettro di  $f$  (con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , se  $i \neq j$ ). Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1.  $\dim(V_{\lambda_1}(f)) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}(f)) \leq n$ .
2.  $f$  è diagonalizzabile  $\Leftrightarrow \dim(V_{\lambda_1}(f)) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}(f)) = n$ .

*Dim.* 1. Sia  $d_i := \dim(V_{\lambda_i})$ , per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Sia  $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i}\}$  una base di  $V_{\lambda_i}$ , per ogni  $i = 1, \dots, k$ . È sufficiente dimostrare che i vettori

$$v_{1,1}, \dots, v_{1,d_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,d_k}$$

sono linearmente indipendenti. A tale scopo siano  $c_{1,1}, \dots, c_{k,d_k} \in K$  scalari, tali che

$$c_{1,1}v_{1,1} + \dots + c_{k,d_k}v_{k,d_k} = 0. \quad (7)$$

Denotiamo con  $w_i := c_{i,1}v_{i,1} + \dots + c_{i,d_i}v_{i,d_i}$ , ed osserviamo che  $w_i \in V_{\lambda_i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Dalla (7) segue che  $w_1 + \dots + w_k = 0$ , quindi per il punto 2. della Proposizione 6 si ha che  $w_1 = \dots = w_k = 0$ . Siccome, per ogni  $i = 1, \dots, k$ ,  $w_i := c_{i,1}v_{i,1} + \dots + c_{i,d_i}v_{i,d_i}$  e  $v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i}$  sono linearmente indipendenti, concludiamo che  $c_{i,1} = \dots = c_{i,d_i} = 0$ ,  $\forall i$ . Da cui segue l'enunciato.

2. ( $\Leftarrow$ ) Siano  $d_1, \dots, d_k, v_{1,1}, \dots, v_{1,d_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,d_k}$ , come nella dimostrazione del punto 1. Allora, per ipotesi  $d_1 + \dots + d_k = n$ . Siccome  $v_{1,1}, \dots, v_{1,d_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,d_k}$  sono linearmente indipendenti, essi formano una base di  $V$  di autovettori per  $f$ , quindi  $f$  è diagonalizzabile.

( $\Rightarrow$ ) Se  $f$  è diagonalizzabile esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  formata da autovettori di  $f$ . Per ogni  $i = 1, \dots, k$  sia  $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,\delta_i}\} \subseteq \mathcal{B}$  il sottoinsieme di  $\mathcal{B}$  formato dai vettori che appartengono a  $V_{\lambda_i}$  (cioè dagli autovettori aventi come autovalore  $\lambda_i$ ). Osserviamo che  $\delta_i \leq d_i := \dim(V_{\lambda_i})$ , ed usando il punto 1. abbiamo:

$$n = \sum_{i=1}^k \delta_i \leq \sum_{i=1}^k d_i \leq n.$$

Quindi  $\sum_{i=1}^k d_i = n$ .  $\square$

Dal precedente teorema si ottiene un procedimento per determinare se un dato endomorfismo  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $K$ , è diagonalizzabile, ed eventualmente trovare una base di  $V$  che diagonalizza  $f$ . Si procede come segue:

1. Si determinano gli autovalori di  $f$ , e quindi il suo spettro  $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ ;
  2. Per ogni  $i = 1, \dots, k$ , si determina la dimensione dell'autospazio  $V_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i \text{Id}_V)$ , osserviamo che per il teorema della dimensione,
- $$\dim(V_{\lambda_i}(f)) = \dim(\ker(f - \lambda_i \text{Id}_V)) = \dim(V) - \text{rg}(f - \lambda_i \text{Id}_V);$$
3.  $f$  è diagonalizzabile  $\Leftrightarrow \dim(V_{\lambda_1}(f)) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}(f)) = \dim(V)$ ;
  4. Se  $f$  è diagonalizzabile, per trovare una base di  $V$  formata da autovettori di  $f$ , si determina una base  $\mathcal{B}_i$  di  $V_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i \text{Id}_V)$ , per ogni  $i = 1, \dots, k$ , allora l'unione  $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$  è una base di  $V$  che diagonalizza  $f$ . Osserviamo che per determinare  $\mathcal{B}_i$  bisogna risolvere un sistema lineare omogeneo.

In pratica, per determinare gli autovalori di  $f$ , si sfrutta il seguente risultato.

**Proposizione 7.** *Sia  $\lambda \in K$  uno scalare. Allora:*

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{Id}_V) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(f - \lambda \text{Id}_V) = 0.$$

*Dim.*  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$ , tale che  $f(v) = \lambda v$ . Siccome  $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow 0 = f(v) - \lambda v = (f - \lambda \text{Id}_V)(v)$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists v \neq 0$  tale che  $v \in \ker(f - \lambda \text{Id}_V)$ . Quindi  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{Id}_V) \neq 0$ .

Sia  $\lambda \in K$  uno scalare. Siccome  $f - \lambda \text{Id}_V$  è un endomorfismo di  $V$ , per il Corollario 2,  $\ker(f - \lambda \text{Id}_V) \neq 0 \Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}_V$  non è un automorfismo. Per il Corollario 4,  $f - \lambda \text{Id}_V$  non è un automorfismo  $\Leftrightarrow$  la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{Id}_V)$  non è invertibile, dove  $\mathcal{B}$  è una base qualsiasi di  $V$ . Dal Corollario 3 del Capitolo 6, abbiamo che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{Id}_V)$  non è invertibile, se e solo se  $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{Id}_V)) = 0$ . Il risultato segue ora dalla Definizione 8,  $\det(f - \lambda \text{Id}_V) = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{Id}_V))$ , dove  $\mathcal{B}$  è una base qualsiasi di  $V$ .  $\square$

Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ , sia  $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ . Allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \text{Id}_V) &\stackrel{\text{Teo.4}}{=} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\lambda \text{Id}_V) \\ &\stackrel{\text{Oss.5}}{=} A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove  $n = \dim(V)$ . Dalla precedente proposizione,

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Osserviamo che la funzione  $K \rightarrow K$ ,  $t \mapsto \det(A - tI_n)$  è polinomiale, in altre parole, se consideriamo  $t$  come una variabile, e calcoliamo  $\det(A - tI_n)$  formalmente con uno dei metodi del Capitolo 6, otteniamo un polinomio di grado  $n$  a coefficienti in  $K$  nella indeterminata  $t$ .

**Definizione 11.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Il **polinomio caratteristico** di  $f$  si definisce come il polinomio  $\det(f - t\text{Id}_V) \in K[t]$  e si indica con  $P_f(t)$ .

Sia  $A \in M_n(K)$ , il polinomio caratteristico di  $A$  è il polinomio  $\det(A - tI_n) \in K[t]$  e si indica con  $P_A(t)$ .

**Esempio 7.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Allora  $P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & -1-t \end{pmatrix} = (1-t)(-1-t) - 6 = t^2 - 7 \in \mathbb{R}[t]$ .

**Osservazione 11. 1.**  $P_f(t) \in K[t]$  è un polinomio di grado pari alla dimensione di  $V$ . Se  $n = \dim(V)$ , allora il coefficiente di  $t^n$  vale  $(-1)^n$ , mentre il termine noto coincide con  $\det(f)$ .

**2.** Se  $A \in M_n(K)$ , allora  $P_A(t) = P_{L_A}(t)$ . Questo segue dal fatto che  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A)$ , dove  $\mathcal{B}$  è la base canonica di  $K^n$ .

Come conseguenza immediata della Proposizione 7 abbiamo il seguente corollario (si confronti con il Corollario 6).

**Corollario 7.**  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$ , cioè gli autovalori di  $f$  coincidono con le radici del polinomio caratteristico  $P_f(t)$ . In particolare il numero degli autovalori distinti di  $f$  è  $\leq \dim(V)$ .

Il precedente risultato fornisce un metodo per calcolare gli autovalori di  $f \in \text{End}(V)$ , quindi lo spettro di  $f$ ,  $\text{Sp}(f)$ . Per ogni  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , per determinare la dimensione di  $V_\lambda(f)$ , osserviamo che  $V_\lambda(f) = \ker(f - \lambda\text{Id}_V)$ , e dal teorema della dimensione segue:

$$\dim(V_\lambda(f)) = \dim(V) - \text{rg}(f - \lambda\text{Id}_V).$$

Per calcolare  $\text{rg}(f - \lambda\text{Id}_V)$ , fissiamo una base qualsiasi  $\mathcal{B}$  di  $V$ , allora dal Corollario 3 abbiamo:

$$\text{rg}(f - \lambda\text{Id}_V) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda\text{Id}_V)) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = \text{rg}(A - \lambda I_n),$$

dove  $n = \dim(V)$  ed  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ . Infine, per determinare una base di  $V_\lambda(f)$ , si trova una base dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo (Corollario 3):

$$(A - \lambda I_n) \cdot x = 0.$$

**Esempio 8. 1.** Consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ . Calcoliamo il polinomio caratteristico di  $A$ :

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & -1-t \end{pmatrix} = t^2 - 7 \in \mathbb{Q}[t].$$

Osserviamo che  $P_A(t)$  non ha radici in  $\mathbb{Q}$ , quindi  $\text{Sp}(A) = \emptyset$  ed  $A$  non è diagonalizzabile. Ricordiamo che questo significa che non esiste una matrice invertibile  $C \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$  tale che  $C^{-1} \cdot A \cdot C$  sia diagonale.

**2.** Consideriamo la stessa matrice  $A$  del punto precedente, questa volta come matrice a coefficienti reali,  $A \in \text{M}_2(\mathbb{R})$ . Allora il polinomio caratteristico  $P_A(t) = t^2 - 7 \in \mathbb{R}[t]$ , ha due radici reali,  $\pm\sqrt{7}$ , quindi  $\text{Sp}(A) = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$ . Usando il teorema della dimensione ed i risultati del Capitolo 5 abbiamo:

$$\begin{aligned}\dim(V_{\sqrt{7}}) &= 2 - \text{rg}(A - \sqrt{7}\mathbf{I}_2) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1 - \sqrt{7} \end{pmatrix} = 1, \\ \dim(V_{-\sqrt{7}}) &= 2 - \text{rg}(A + \sqrt{7}\mathbf{I}_2) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1 + \sqrt{7} \end{pmatrix} = 1.\end{aligned}$$

Quindi  $\dim(V_{\sqrt{7}}) + \dim(V_{-\sqrt{7}}) = 2$ , da cui segue che  $A$  è diagonalizzabile. Per trovare una base di  $\mathbb{R}^2$  che diagonalizza  $A$  (equivalentemente una matrice  $C \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  tale che  $C^{-1} \cdot A \cdot C$  sia diagonale), risolviamo i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1 - \sqrt{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1 + \sqrt{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

In particolare,  $V_{\sqrt{7}} = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{7} \end{pmatrix}$ ,  $V_{-\sqrt{7}} = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{7} \end{pmatrix}$ . Quindi  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{7} \end{pmatrix} \right\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$  che diagonalizza  $A$ , equivalentemente  $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 + \sqrt{7} & -1 - \sqrt{7} \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ . Si osservi che

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

**3.** Consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_2(\mathbb{R})$ . Allora  $P_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$ . Siccome  $P_A(t)$  non ha radici in  $\mathbb{R}$ ,  $A$  non è diagonalizzabile.

**4.** Consideriamo ora la stessa matrice  $A$  del punto precedente come matrice a coefficienti complessi,  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_2(\mathbb{C})$ . Allora  $\text{Sp}(A) = \{i, -i\}$ . Inoltre,  $\dim(V_i) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = 1$ , ed  $\dim(V_{-i}) = 2 - \text{rg} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = 1$ . Quindi  $A$  è diagonalizzabile, se considerata come matrice a coefficienti complessi. Procedendo come nell'esempio 2, si trova che una base che diagonalizza  $A$  è  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ ,

e ponendo  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$  si ottiene:

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

**5.** Consideriamo infine  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ , dove  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , oppure  $\mathbb{C}$ . Allora  $P_A(t) = t^2$ , quindi  $\text{Sp}(A) = \{0\}$  per ogni campo  $K$ .  $\dim(V_0) = 2 - \text{rg}(A) = 1 \neq 2$ , quindi  $A$  non è diagonalizzabile.

**Osservazione 12.** I precedenti esempi mostrano che la diagonalizzabilità di una matrice (rispettivamente di un endomorfismo  $f \in \text{End}(V)$ ) può dipendere dal campo  $K$  su cui è definita la matrice (rispettivamente l'endomorfismo). Cioè, se  $A \in M_n(K)$ , e  $\hat{K}$  è un campo che contiene  $K$ , allora  $A \in M_n(\hat{K})$ . In questa situazione può accadere che  $A$  non sia simile ad una matrice diagonale in  $M_n(K)$ , mentre  $A$  è simile ad una matrice diagonale in  $M_n(\hat{K})$ .

Concludiamo il capitolo con un altro criterio per stabilire se un endomorfismo è diagonalizzabile.

**Definizione 12.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$  e sia  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ .

La **molteplicità algebrica di  $\lambda$**  è la molteplicità di  $\lambda$  come radice del polinomio caratteristico  $P_f(t)$ , si denota con  $m_a(\lambda, f)$ , ovvero con  $m_a(\lambda)$ .

La **molteplicità geometrica di  $\lambda$**  è la dimensione dell'autospazio  $V_\lambda(f)$  relativo a  $\lambda$ , si denota con  $m_g(\lambda, f)$ , ovvero con  $m_g(\lambda)$ .

**Proposizione 8.**  $\forall \lambda \in \text{Sp}(f)$ , vale la seguente diseguaglianza:

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

*Dim.* Sia  $V_\lambda \subseteq V$  l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$ . Sia  $\{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda)}\}$  una base di  $V_\lambda$ . Completiamo  $v_1, \dots, v_{m_g(\lambda)}$  ad una base di  $V$ ,  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda)}, v_{m_g(\lambda)+1}, \dots, v_n\}$ , dove  $n = \dim(V)$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  ha la seguente forma:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_{m_g(\lambda)} & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

dove  $A \in M_{m_g(\lambda), n-m_g(\lambda)}(K)$ ,  $0$  è la matrice nulla di  $M_{n-m_g(\lambda), m_g(\lambda)}(K)$ ,  $B \in M_{n-m_g(\lambda)}(K)$ . Quindi

$$\begin{aligned} P_f(t) &= \det \begin{pmatrix} (\lambda - t)I_{m_g(\lambda)} & A \\ 0 & B - tI_{n-m_g(\lambda)} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - t)^{m_g(\lambda)} \cdot \det(B - tI_{n-m_g(\lambda)}). \end{aligned}$$

Quindi  $\lambda$  interviene almeno  $m_g(\lambda)$  volte come radice di  $P_f(t)$ , perciò  $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ .  $\square$

**Teorema 6.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo  $K$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora  $f$  è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1. *Tutte le radici di  $P_f(t)$  appartengono al campo  $K$  (cioè  $P_f(t)$  decomponibile come prodotto di polinomi di grado 1 in  $K[t]$ );*
2.  $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ .

**Osservazione 13.** Ricordiamo che, per ipotesi  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , oppure  $\mathbb{C}$ , quindi in ogni caso,  $K \subseteq \mathbb{C}$ . Di conseguenza  $K[t] \subseteq \mathbb{C}[t]$ , in altre parole ogni polinomio a coefficienti in  $K$  può essere considerato come un polinomio a coefficienti in  $\mathbb{C}$ . In particolare il polinomio caratteristico  $P_f(t) \in K[t]$  può essere considerato come polinomio in  $\mathbb{C}[t]$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra,

$$P_f(t) = (\lambda_1 - t) \cdot (\lambda_2 - t) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - t),$$

con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  (non necessariamente distinti), dove  $n = \dim(V)$ . Nel punto 1. del precedente teorema si richiede che  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ .

Vediamo dapprima una conseguenza immediata del Teorema 6.

**Corollario 8.** *Sia  $n = \dim(V)$ . Se  $f$  ha  $n$  autovalori distinti, allora  $f$  è diagonalizzabile.*

*Dim.* Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $f$  (che per ipotesi sono distinti). Per definizione di autovalore,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , quindi la condizione 1. del Teorema 6 è soddisfatta. Inoltre  $P_f(t) = (\lambda_1 - t) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - t)$ , quindi  $m_a(\lambda_1) = \dots = m_a(\lambda_n) = 1$ . Da questo fatto e dalla Proposizione 8 deduciamo che  $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) = 1$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Quindi  $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , ed anche la condizione 2. del Teorema 6 è soddisfatta, perciò  $f$  è diagonalizzabile.  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 6.* Sia  $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ , con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , per ogni  $i \neq j$ . Siccome  $P_f(t) \in K[t]$  ha grado  $n$ ,  $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) \leq n$ , e la condizione 1. del Teorema 6 è equivalente alla condizione  $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) = n$ . Dalla Proposizione 8 segue che  $m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) \leq m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k)$ , ed inoltre vale l'uguaglianza se e solo se  $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Quindi le condizioni 1. e 2. sono equivalenti alla condizione  $m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_k) = n$ , che è equivalente al fatto che  $f$  sia diagonalizzabile per il Teorema 5.  $\square$