Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: APPLICAZIONI LINEARI

1. Sia n un numero intero positivo e sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ una matrice quadrata. La **traccia** di A è la somma degli elementi sulla diagonale (principale) e si indica con $\mathrm{Tr}(A)$,

$$\mathrm{Tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} .$$

Si dimostri che la funzione $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ che associa ad ogni matrice la sua traccia è un'applicazione lineare. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ nel caso in cui $n = 2$.

2. Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si consideri la funzione $T\colon \mathrm{M}_{m,n}(K) \to \mathrm{M}_{n,m}(K)$ che associa ad ogni matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ la sua trasposta, $T(A) = {}^tA$. Si dimostri che T è un isomorfismo di spazi vettoriali sul campo K.

3. Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}?$$

Si motivi la risposta.

4. Si giustifichi l'esistenza di un'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre:

(i) la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$;

(ii) $\mathrm{Ker}(f)$ ed $\mathrm{Im}(f)$.

5. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si consideri la seguente funzione

$$f_a\colon \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3, \quad f_a(P) = \begin{pmatrix}P(0)\\P(1)\\P(a)\end{pmatrix}.$$

Si dica se f_a è un'applicazione lineare e, nel caso affermativo, si determini i valori di a tali che f_a è un isomorfismo.

6. Sia $\mathcal{B} = \{\sin(x), \cos(x), \sin(x)\cdot\cos(x), \sin^2(x), \cos^2(x)\} \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, dove $\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $V := \mathrm{Span}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e si consideri il seguente endomorfismo di V:

$$F\colon V \to V\,, \quad F(f) = f'\,,$$

dove f' è la derivata prima di f rispetto ad x.

(a) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di V.

(b) Si determini la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.

(c) Si determini una base di $\mathrm{Ker}(F)$ e di $\mathrm{Im}(F)$.

7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

e sia $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A. Si determinino basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente tali che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

8. Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})\,.$$

Sia $L_M\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad M.

(a) Determinare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(L_M)$ e di $\mathrm{Im}(L_M)$.

(b) Sia

$$U := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e sia $W := \mathrm{Ker}(L_M) \subset \mathbb{R}^5$. Trovare la dimensione di ciascuno dei sottospazi $W + U$ e $W \cap U$.

9. Sia $\mathbb{C}[t]_2$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 2 nell'indeterminata t a coefficienti complessi. Si consideri l'endomorfismo $f\colon \mathbb{C}[t]_2 \to \mathbb{C}[t]_2$ che associa ad ogni $P \in \mathbb{C}[t]_2$ $f(P) = P' + P$, dove $P' \in \mathbb{C}[t]_2$ è la derivata prima di P rispetto a t.

(a) Si determini la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ di $\mathbb{C}[t]_2$.

(b) Si dica se f è un isomorfismo ed, in caso affermativo, si determini la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$, dove f^{-1} è la funzione inversa di f.

10. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \\ x \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ che rappresenta f nelle basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^2 \text{ e } \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^3.$$

(b) Si determini il rango di f ed una base dell'immagine di f.

(c) Si determini il nucleo di f.

11. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e si consideri la funzione $S_M\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $S_M(A) = M \cdot A$, dove $M \cdot A$ è il prodotto righe per colonne di M ed A.

(a) Si dimostri che S_M è un'applicazione lineare (si possono sfruttare le proprietà del prodotto righe per colonne).

(b) Sia ora $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si determini la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S_M)$ che rappresenta S_M rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Si determinino il rango di S_M, una base di $\ker(S_M)$ ed una base di $\mathrm{im}(\mathrm{S_M})$.

(c) Per ogni $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si dimostri che S_M è un isomorfismo se e solo se M è invertibile. In tal caso si determini $(S_M)^{-1}$, la funzione inversa di S_M.

12. Per ogni valore del parametro $t \in \mathbb{R}$, si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; w_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori u, v, w_t formano una base di $\mathbb{R}^3$?

(b) Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $f_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f_t(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ f_t(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ f_t(w_t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ?$$

Per ogni tale $t \in \mathbb{R}$ si determinino una base di $\mathrm{Im}(f_t)$ e di $\mathrm{Ker}(f_t)$.