Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: CAMBIAMENTO DI BASE-DIAGONALIZZAZIONE

1. Siano $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$ e $g: \mathbb{R}[t]_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + (2y - x)t + zt^2, \quad g(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(-1) \end{pmatrix}.$$

Si determini la matrice che rappresenta $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$. Si trovi una base di $\text{Ker}(g \circ f)$ ed $\text{Im}(g \circ f)$.

2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dopo aver verificato che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono due basi di $\mathbb{R}^3$, si determini la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}$.

3. Per $K = \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, si determinino gli autovalori ed i relativi autospazi per ognuna delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

In ogni caso in cui la matrice è diagonalizzabile, si trovi una base che la diagonalizza.

4. Sia $A \in M_n(K)$. Si dimostri che A ed A^t hanno gli stessi autovalori. Si può dire lo stesso per gli autovettori?

5. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo $f_a: \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_3$, $f_a(P) = t^2 P''(t - a)$, dove P'' è la derivata seconda di P . Si determini i valori di a per cui f_a è diagonalizzabile. Per ogni a tale che f_a è diagonalizzabile, si determini una base di $\mathbb{R}[t]_3$ che diagonalizza f_a .

6. Si calcoli il polinomio caratteristico e gli autovalori della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si dica se tale matrice è diagonalizzabile.

7. Si determini i valori di $a, b \in \mathbb{R}$, tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile. Per ogni tale a, b si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza A .

8. Si dica se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determinino una matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$ ed una matrice $M \in GL_4(\mathbb{R})$, tale che $D = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

9. Si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ y + z \\ -x + 3y \end{pmatrix}.$$

a) Si calcoli il determinante di f .

b) Si dica se f è un automorfismo. Nel caso affermativo si determini la matrice che rappresenta l'inversa f^{-1} di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

c) Si dica se f è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f e la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

10. Si determini $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sapendo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Dire se A è diagonalizzabile. Nel caso affermativo si determini una matrice $B \in GL(3, \mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D , tali che $B^{-1}AB = D$.

11. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V . Sia $f: V \rightarrow V$ la applicazione lineare definita come segue: $f(v_1) = -v_1 + 2v_3$, $f(v_2) = v_1 + v_2$, $f(v_3) = v_1$, $f(v_4) = 3v_4$.

- (i) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- (ii) Si determinino lo spettro di f e, per ogni autovalore, la relativa molteplicità algebrica e geometrica.
- (iii) Si dica se f è diagonalizzabile.

12. Si considerino le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definite come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ x + y - z \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + t \\ t \\ s + 2t \end{pmatrix}.$$

Sia $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la loro composizione.

- (a) Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f)$ che rappresenta $g \circ f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$.
- (b) Si determinino una base di $\ker(g \circ f)$ ed una base di $\text{im}(g \circ f)$.
- (c) Si dica se $g \circ f$ è diagonalizzabile.

13. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

- (i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali? (Cioè esiste $B \in GL_2(\mathbb{R})$, tale che $B^{-1}AB$ è diagonale.) Per ogni tale a si determinino $B \in GL_2(\mathbb{R})$ e $D \in M_2(\mathbb{R})$, tale che D è diagonale e $D = B^{-1}AB$.
- (ii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri complessi? (Cioè esiste $B \in GL_2(\mathbb{C})$, tale che $B^{-1}AB$ è diagonale.) Per ogni tale a si determinino $B \in GL_2(\mathbb{C})$ e $D \in M_2(\mathbb{C})$, tale che D è diagonale e $D = B^{-1}AB$.