

9. Prodotti scalari, forme bilineari, spazi Euclidei

1 Prodotti scalari e forme bilineari

Definizione 1. *Il prodotto scalare canonico (anche detto **standard**) su $\mathbb{R}^n$ è la seguente funzione:*

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \rangle = {}^t v \cdot w = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n.$$

Per ogni $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, la **norma** di v si definisce come segue:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Osserviamo che $\|v\|$ coincide con la lunghezza del vettore v , cioè la distanza dall'origine del punto $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

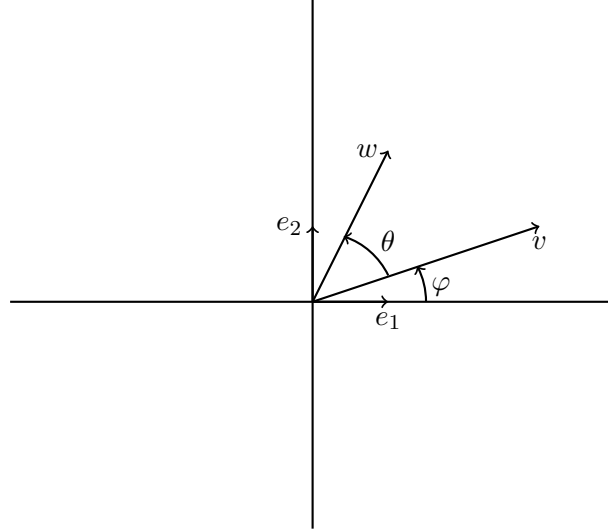
Valgono le seguenti proprietà la cui verifica è lasciata per esercizio.

1. $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle, \forall v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n;$
2. $\langle cv, w \rangle = c\langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R};$
3. $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \forall v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n;$
4. $\langle v, cw \rangle = c\langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R};$
5. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n;$
6. $\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$, ed è $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Esempio 1. Consideriamo il caso $n = 2$. Siano $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\langle v, w \rangle = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2.$$

Supponiamo ora che $v, w \neq 0$ e mostriamo come, usando il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sia possibile determinare il coseno dell'angolo θ compreso tra i vettori v e w (come mostrato nella seguente figura).



Esprimiamo le coordinate di v (rispettivamente di w) in funzione della norma $\|v\|$ (rispettivamente $\|w\|$) e dell'angolo φ (rispettivamente $\varphi + \theta$):

$$\begin{cases} \lambda_1 = \|v\| \cos \varphi \\ \lambda_2 = \|v\| \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1 = \|w\| \cos(\varphi + \theta) = \|w\|(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) \\ \mu_2 = \|w\| \sin(\varphi + \theta) = \|w\|(\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta). \end{cases}$$

Scriviamo le equazioni per μ_1 e μ_2 come segue:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\|w\|} \\ \frac{\mu_2}{\|w\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = 1$, la matrice è invertibile, e moltiplicando ambo i membri dell'equazione per la matrice inversa otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\|w\|} \\ \frac{\mu_2}{\|w\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 \cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi}{\|w\|} \\ \frac{-\mu_1 \sin \varphi + \mu_2 \cos \varphi}{\|w\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2}{\|v\| \cdot \|w\|} \\ \frac{-\mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_1}{\|v\| \cdot \|w\|} \end{pmatrix},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le seguenti equazioni: $\cos \varphi = \frac{\lambda_1}{\|v\|}$, $\sin \varphi = \frac{\lambda_2}{\|v\|}$. Da questo segue che $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$.

Il precedente esempio motiva la seguente definizione. Ricordiamo che la funzione coseno è una biezione $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Definizione 2. Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ due vettori non nulli. L'**angolo convesso tra v e w** è definito come l'angolo $\theta \in [0, \pi]$, tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Osservazione 1. Come vedremo in seguito, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$. In particolare, se $v, w \neq 0$, allora $-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$, quindi la precedente definizione è ben posta.

È possibile estendere la nozione di prodotto scalare ad uno spazio vettoriale arbitrario definito sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. A tale scopo introduciamo prima la nozione di forma bilineare, che può essere definita su un campo K qualsiasi.

Definizione 3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K .

1. Una **forma bilineare** su V è una funzione $g: V \times V \rightarrow K$ che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} g(v_1 + v_2, w) &= g(v_1, w) + g(v_2, w), \quad \forall v_1, v_2, w \in V; \\ g(v, w_1 + w_2) &= g(v, w_1) + g(v, w_2), \quad \forall v, w_1, w_2 \in V; \\ g(\lambda v, w) &= \lambda g(v, w) = g(v, \lambda w), \quad \forall v, w \in V, \forall \lambda \in K. \end{aligned}$$

L'insieme di tutte le forme bilineari su V si denota con $\text{Bil}(V)$.

Sia g una forma bilineare su V . Allora g è: **simmetrica**, se $g(v, w) = g(w, v)$, $\forall v, w \in V$; **antisimmetrica**, se $g(v, w) = -g(w, v)$, $\forall v, w \in V$.

Se il campo K è il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, allora una forma bilineare g su V si dice: **semi-definita positiva** (rispettivamente **semi-definita negativa**), se $g(v, v) \geq 0$, $\forall v \in V$ (rispettivamente $g(v, v) \leq 0$, $\forall v \in V$); **definita positiva** (rispettivamente **definita negativa**), se $g(v, v) > 0$, $\forall v \in V$, e $g(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (rispettivamente se $g(v, v) < 0$, $\forall v \in V$, e $g(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$).

2. Sia ora $K = \mathbb{R}$. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simmetrica e definita positiva.

Osservazione 2. Sia $g: V \times V \rightarrow K$ una forma bilineare. Allora, per ogni $v \in V$ fissato, la funzione $V \rightarrow K$, $w \rightarrow g(v, w)$ è lineare, quindi $g(v, 0) = 0$. Analogamente, la funzione $V \rightarrow K$, $v \rightarrow g(v, w)$ è lineare, per ogni $w \in V$ fissato, quindi $g(0, w) = 0$.

Esempio 2. 1. La funzione nulla $g: V \times V \rightarrow K$, che associa ad ogni coppia $(v, w) \in V \times V$ lo zero del campo K , $g(v, w) = 0 \in K$, è una forma bilineare simmetrica ed antisimmetrica. Se $K = \mathbb{R}$, allora g è semi-definita positiva, ma non definita positiva.

2. Sia $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$. Allora g è una forma bilineare (la verifica è lasciata per esercizio). Osserviamo che g non è simmetrica, infatti $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 2 = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. Consideriamo la funzione $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 \mu_1$. Allora g è una forma bilineare simmetrica, è semi-definita positiva, ma non è definita positiva (infatti $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$, tuttavia $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

4. Consideriamo ora la forma bilineare $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2$. Allora g è simmetrica, ma non è né semi-definita positiva né semi-definita negativa, infatti $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 > 0$, mentre $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1 < 0$.

5. La funzione determinante, considerata come funzione $g: K^2 \times K^2 \rightarrow K$, $g\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \in K$, è una forma bilineare antisimmetrica.

6. Siano $a < b \in \mathbb{R}$. La funzione $g: \mathbb{R}[t]_d \times \mathbb{R}[t]_d \rightarrow \mathbb{R}$, $g(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$, è un prodotto scalare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]_d$ dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado $\leq d$. (La verifica è lasciata per esercizio.)

7. Sia $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}\right) = 2\lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + 3\lambda_3 \mu_3$.

Allora g è un prodotto scalare. Si verifichi per esercizio che g è una forma bilineare simmetrica. Osserviamo che

$$g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = 2a^2 + 2ab + b^2 + 3c^2 = a^2 + (a+b)^2 + 3c^2 \geq 0, \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\text{ed inoltre } g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ se e solo se } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Per ogni $n \geq 1$, il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$ su $\mathbb{R}^n$ è un prodotto scalare.

9. Per ogni matrice quadrata $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$, definiamo una funzione $g_A: K^n \times K^n \rightarrow K$ come segue:

$$g_A(v, w) = {}^t \lambda \cdot A \cdot \mu = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i a_{ij} \mu_j, \quad \forall v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Si verifica facilmente che g_A è una forma bilineare su K^n (esercizio).

Proposizione 1. [Formula di polarizzazione] Sia $g \in \text{Bil}(V)$ una forma bilineare simmetrica. Allora, $\forall v, w \in V$, vale la seguente formula:

$$g(v, w) = \frac{1}{2} \left[g(v+w, v+w) - g(v, v) - g(w, w) \right].$$

Dim. Siccome g è bilineare e simmetrica, vale la seguente uguaglianza:

$$g(v+w, v+w) = g(v, v) + g(w, w) + 2g(v, w), \quad \forall v, w \in V,$$

da cui segue il risultato. $\square$

Riportiamo la seguente proposizione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Proposizione 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K . Sia $\text{Bil}(V)$ l'insieme delle forme bilineari su V . Definiamo un'operazione di somma ed un prodotto per scalari in $\text{Bil}(V)$ come segue: $\forall g, h \in \text{Bil}(V)$, $(g+h)(v, w) = g(v, w) + h(v, w)$, $\forall v, w \in V$; $\forall c \in K$, $\forall g \in \text{Bil}(V)$, $(c \cdot g)(v, w) = c \cdot g(v, w)$, $\forall v, w \in V$. Allora, con tali operazioni, $\text{Bil}(V)$ è uno spazio vettoriale su K , il vettore nullo è la forma bilineare nulla (Esempio 2. 1.)*

1.1 Forme bilineari e matrici

Definizione 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su K . Sia $g: V \times V \rightarrow K$ una forma bilineare. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . La **matrice che rappresenta g rispetto alla base $\mathcal{B}$** è la matrice $M_{\mathcal{B}}(g) \in M_n(K)$ il cui elemento di posto (i, j) è $g(v_i, v_j)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$,*

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & \dots & g(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(v_n, v_1) & \dots & g(v_n, v_n) \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Esempio 3. 1. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, e sia $\langle, \rangle$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$M_{\mathcal{B}}(\langle, \rangle) = I_n.$$

2. Sia $A \in M_n(K)$, e sia $g_A: K^n \times K^n \rightarrow K$ la forma bilineare definita nell'Esempio 2.9. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di K^n . Allora:

$$M_{\mathcal{B}}(g_A) = A.$$

Proposizione 3. *Siano V , g e $\mathcal{B}$ come nella Definizione 4. Sia $M_{\mathcal{B}}(g) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice che rappresenta g rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora, $\forall v, w \in V$,*

se v ha coordinate $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$, e w ha coordinate $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$,

$$g(v, w) = {}^t\lambda \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot \mu = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i a_{ij} \mu_j.$$

Dim. L'enunciato segue dalle seguenti uguaglianze, ottenute sfruttando la bilinearità di g :

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j g(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j a_{ij}, \end{aligned}$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la definizione di $M_{\mathcal{B}}(g)$, il cui elemento di posto (i, j) , $a_{ij} = g(v_i, v_j)$. $\square$

Osservazione 3. 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo K . Sia $\mathcal{B}$ una base di V fissata. Per ogni matrice quadrata $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, in maniera analoga all'Esempio 2.9., possiamo definire una forma

bilineare g_A su V : per ogni $v, w \in V$, siano $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in K^n$ le

coordinate di v, w , rispettivamente, allora

$$g_A(v, w) := {}^t \lambda \cdot A \cdot \mu = \sum_{i, j=1}^n \lambda_i a_{ij} \mu_j.$$

Osserviamo che $M_{\mathcal{B}}(g_A) = A$, $\forall A \in M_n(K)$, ed inoltre $g_{M_{\mathcal{B}}(g)} = g$, quindi la funzione

$$M_{\mathcal{B}}: \text{Bil}(V) \rightarrow M_n(K), \quad g \mapsto M_{\mathcal{B}}(g)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Proposizione 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K . Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Sia $g: V \times V \rightarrow K$ una forma bilineare su V . Allora g è simmetrica $\Leftrightarrow$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(g)$ è simmetrica.

Dim. $(\Rightarrow)$ Se g è simmetrica, allora $g(v_i, v_j) = g(v_j, v_i)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Quindi ${}^t M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g)$, cioè $M_{\mathcal{B}}(g)$ è simmetrica.

$(\Leftarrow)$ Se $M_{\mathcal{B}}(g)$ è una matrice simmetrica, allora $g(v_i, v_j) = g(v_j, v_i)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Siano ora $v, w \in V$ due vettori arbitrari. Abbiamo che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Quindi, $g(v, w) = \sum_{i, j=1}^n \lambda_i \mu_j g(v_i, v_j) = \sum_{i, j=1}^n \lambda_i \mu_j g(v_j, v_i) = g(w, v)$, da cui segue che g è simmetrica. $\square$

Proposizione 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K . Sia $g \in \text{Bil}(V)$ una forma bilineare su V . Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ due basi di V . Allora,

$$M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V),$$

dove $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ (Definizione 6, Capitolo 8).

Dim. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$. Denotiamo con c_{ij} l'elemento di posto (i, j) della matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, e ricordiamo che, per definizione di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$, si ha che $w_j = c_{1j}v_1 + \dots + c_{nj}v_n$, $\forall j = 1, \dots, n$. Si hanno quindi le seguenti uguaglianze per l'elemento di posto (i, j) di $M_{\mathcal{C}}(g)$:

$$\begin{aligned} g(w_i, w_j) &= g(c_{1i}v_1 + \dots + c_{ni}v_n, c_{1j}v_1 + \dots + c_{nj}v_n) \\ &= \sum_{k, \ell=1}^n c_{ki}g(v_k, v_{\ell})c_{\ell j}. \end{aligned}$$

L'enunciato segue dal fatto che $\sum_{k, \ell=1}^n c_{ki}g(v_k, v_{\ell})c_{\ell j}$ è l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$. $\square$

Definizione 5. Due matrici $A, B \in M_n(K)$ si dicono **congruenti** se $\exists C \in \text{GL}_n(K)$ tale che

$$B = {}^tC \cdot A \cdot C.$$

In tal caso si scrive $B \equiv A$.

Osservazione 4. 1. La congruenza è una relazione di equivalenza tra matrici. La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del fatto che la similitudine è una relazione di equivalenza, ed è lasciata per esercizio (si veda l'Osservazione 8.1. del Capitolo 8).

2. Sia $g \in \text{Bil}(V)$, e sia $A = M_{\mathcal{B}}(g)$, dove $\mathcal{B}$ è una base di V . Allora, se $B \in M_n(K)$, con $n = \dim(V)$, $B \equiv A \Leftrightarrow \exists \mathcal{C}$ base di V tale che $B = M_{\mathcal{C}}(g)$. In altre parole, due matrici sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a due basi di V .

3. Come vedremo nel Capitolo 10, il Teorema spettrale afferma che, per ogni matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $C \in O(n)$ (si veda la sezione 2.2), tale che ${}^tC \cdot A \cdot C = D$, con D matrice diagonale. In particolare A è congruente ad una matrice diagonale D . Questo fornisce un metodo per stabilire se la forma bilineare simmetrica g_A è un prodotto scalare. Infatti, per la precedente osservazione, g_A è un prodotto scalare se e solo se g_D è un prodotto

scalare. Se $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, allora g_D è un prodotto scalare, se e solo

se $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ (la verifica è lasciata per esercizio). Inoltre, siccome $C \in O(n)$, ${}^tC = C^{-1}$, quindi $A \sim D$, da cui segue che $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A . Quindi, g_A è un prodotto scalare $\Leftrightarrow$ gli autovalori di A sono positivi, cioè $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda > 0$.

Riportiamo per completezza il seguente risultato, senza dimostrazione. Per dettagli e per una dimostrazione rimandiamo al seguente libro di testo: Sernesi, "Geometria 1", Bollati Boringhieri.

Teorema 1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo K . Sia $g \in \text{Bil}(V)$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(g)$ è diagonale. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in M_n(K)$ è congruente ad una matrice diagonale.*

1.2 Forme sesqui-lineari e forme Hermitiane

Riportiamo per completezza la seguente definizione.

Definizione 6. *Il **prodotto Hermitiano canonico** (ovvero **standard**) su $\mathbb{C}^n$ è la funzione $h: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita come segue:*

$$h\left(v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}\right) = {}^t v \cdot \bar{w} = \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_n, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n,$$

dove $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n$ sono i coniugati di $\mu_1, \dots, \mu_n$ rispettivamente.

La **norma** di $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ si definisce come segue:

$$\|v\| = \sqrt{h(v, v)} = \sqrt{|\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2}.$$

Osserviamo che h soddisfa le seguenti proprietà:

1. $h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w), \forall v_1, v_2, w \in \mathbb{C}^n$;
2. $h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2), \forall v, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n$;
3. $h(cv, w) = ch(v, w), \forall v, w \in \mathbb{C}^n$ e $\forall c \in \mathbb{C}$;
4. $h(v, cw) = \bar{c}h(v, w), \forall v, w \in \mathbb{C}^n$ e $\forall c \in \mathbb{C}$;
5. $h(v, w) = \overline{h(w, v)}, \forall v, w \in \mathbb{C}^n$;
6. $h(v, v) \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall v \in \mathbb{C}^n$, ed è $= 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Definizione 7. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Una **forma sesqui-lineare** è una funzione $g: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfa le proprietà 1, 2, 3 e 4 di cui sopra. Una forma sesqui-lineare $g: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ è detta una **forma Hermitiana**, se soddisfa anche alle proprietà 5 e 6 di cui sopra.*

2 Spazi vettoriali Euclidei

Definizione 8. *Uno **spazio vettoriale Euclideo** è una coppia (V, g) , dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è un prodotto scalare. Per ogni vettore $v \in V$, la **norma** di v è definita come segue: $\|v\| := \sqrt{g(v, v)}$.*

Osservazione 5. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. La restrizione di g a W è la funzione $g|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue: $\forall v, w \in W, g|_W(v, w) := g(v, w)$. Si osservi che $g|_W$ è un prodotto scalare su W (esercizio), che chiameremo anche **prodotto scalare indotto da g** , quindi $(W, g|_W)$ è uno spazio Euclideo.

Proposizione 6. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Allora valgono le seguenti affermazioni:

1. $\forall v \in V, \|v\| \geq 0$, ed è $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
2. $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|, \forall v \in V \text{ e } \forall c \in \mathbb{R}$;
3. $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2g(v, w) + \|w\|^2, \forall v, w \in V$;
4. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|g(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|, \forall v, w \in V$, e vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.
5. Disuguaglianza triangolare: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in V$.
6. $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\|, \forall v, w \in V$.

Dim. Le proprietà 1 e 2 seguono direttamente dalla definizione di prodotto scalare. Le loro verifiche sono lasciate come esercizio.

3. Per la bilinearità di g abbiamo: $\|v + w\|^2 = g(v + w, v + w) = g(v, v) + 2g(v, w) + g(w, w) = \|v\|^2 + 2g(v, w) + \|w\|^2$.

4. Se $w = 0$, allora $g(v, 0) = 0$ e $\|v\| \cdot 0 = 0$, quindi la disuguaglianza è soddisfatta. Quindi supponiamo che $w \neq 0$. Dalle proprietà precedenti segue che: $0 \leq \|v + tw\|^2 = \|v\|^2 + 2tg(v, w) + t^2\|w\|^2, \forall t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che la funzione $t \mapsto \|v\|^2 + 2tg(v, w) + t^2\|w\|^2$, al variare di $t \in \mathbb{R}$, ha come grafico una parabola, e siccome è ovunque ≥ 0 , $g(v, w)^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \leq 0$, da cui segue l'enunciato. Inoltre osserviamo che v e w sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $v + tw = 0$, quindi se e solo se $g(v, w)^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 = 0$.

5. $\|v + w\|^2 = g(v + w, v + w) = \|v\|^2 + 2g(v, w) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|g(v, w)| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$, dove nella seconda disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Quindi $\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$, da cui segue l'enunciato.

6. Osserviamo che, $\forall v, w \in V$, dalla disuguaglianza triangolare abbiamo: $\|v\| = \|(v + w) - w\| \leq \|v + w\| + \|-w\| = \|v + w\| + \|w\|$. Da cui segue che $\|v\| - \|w\| \leq \|v + w\|$. Analogamente si dimostra che: $\|w\| - \|v\| \leq \|v + w\|$. Quindi $|\|v\| - \|w\|| = \pm(\|v\| - \|w\|) \leq \|v + w\|$. $\square$

Definizione 9. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo.

1. Siano $v, w \in V \setminus \{0\}$ due vettori non nulli. L'**angolo convesso** tra v e w si definisce come l'angolo $\theta \in [0, \pi]$, tale che $\cos \theta = \frac{g(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|}$.
2. Due vettori $v, w \in V$ sono **ortogonali** se $g(v, w) = 0$. Vettori ortogonali sono anche detti **perpendicolari** e si denota con il simbolo $v \perp w$.

3. Due sottoinsiemi $S_1, S_2 \subseteq V$ sono ortogonali se $v \perp w, \forall v \in S_1 \text{ e } \forall w \in S_2$.
4. Sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme. L'ortogonale ad S è il sottoinsieme $S^\perp := \{w \in V \mid w \perp v, \forall v \in S\}$.

Osservazione 6. 1. Siano $v, w \in V \setminus \{0\}$. Se $v \perp w$, allora l'angolo convesso tra v e w è $\frac{\pi}{2}$.

2. Dalle proprietà del prodotto scalare segue che: $v \perp v \Leftrightarrow v = 0$.

3. Per ogni sottoinsieme $S \subseteq V$, l'ortogonale $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V . (La verifica è lasciata per esercizio.)

Definizione 10. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo, con V di dimensione finita. Una **base ortogonale** di (V, g) è una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che $v_i \perp v_j$, per ogni $i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$.

Una **base ortonormale** di (V, g) è una base ortogonale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $\|v_i\| = 1$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

In seguito, una base ortogonale (rispettivamente ortonormale) di uno spazio vettoriale Euclideo (V, g) verrà anche detta base di V ortogonale (rispettivamente ortonormale) per il prodotto scalare g .

Esempio 4. 1. Per ogni $n \geq 1$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale per il prodotto scalare standard.

2. La base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortogonale, ma non ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se dividiamo i vettori della base per le rispettive norme otteniamo una base ortonormale, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Osservazione 7. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, g) . Allora $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ è una base ortonormale di (V, g) .

Proposizione 7. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori non nulli a due a due ortogonali. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Dim. Siano $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tali che $c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$. Allora, per ogni $i = 1, \dots, k$, $0 = g(v_i, c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) = c_1 g(v_i, v_1) + \dots + c_i g(v_i, v_i) + \dots + c_k g(v_i, v_k)$. Poiché $v_i \perp v_j$, per ogni $j \neq i$, dalle precedenti uguaglianze otteniamo: $0 = c_i g(v_i, v_i) = c_i \|v_i\|^2$. Per ipotesi $v_i \neq 0$, quindi $c_i = 0$. $\square$

Proposizione 8. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di (V, g) . Allora, $\forall v \in V$,

$$v = g(v, v_1)v_1 + \dots + g(v, v_n)v_n,$$

cioè le coordinate di v rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ sono $g(v, v_1), \dots, g(v, v_n)$.

Dim. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioè $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora, $\forall i = 1, \dots, n$, $g(v, v_i) = g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i) = \lambda_1 g(v_1, v_i) + \dots + \lambda_n g(v_n, v_i)$. Siccome $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, $g(v_i, v_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Quindi $g(v, v_i) = \lambda_i, \forall i = 1, \dots, n$. $\square$

Esempio 5. Consideriamo la seguente base di $\mathbb{R}^2$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Determiniamo le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dalla precedente proposizione segue:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} v_1 - \frac{7}{\sqrt{5}} v_2. \end{aligned}$$

Teorema 2. [Gram-Schmidt] Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Siano $w_1, \dots, w_k \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora esiste una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ ortonormale per il prodotto scalare indotto da g (si veda l'Osservazione. 5).

Dim. Procediamo per induzione su k . Se $k = 1$, allora definiamo v_1 come segue:

$$v_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|}.$$

$(k-1 \Rightarrow k)$ Per ipotesi induttiva, esistono $v_1, \dots, v_{k-1} \in \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$ che formano una base ortonormale di $\text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$. Definiamo v_k nel seguente modo. Sia

$$\tilde{w}_k := g(w_k, v_1)v_1 + \dots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1},$$

vedremo più avanti che $\tilde{w}_k$ è la proiezione ortogonale di w_k sul sottospazio $\text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1}) = \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$. Consideriamo ora il vettore $\tilde{v}_k := w_k - \tilde{w}_k$, ed osserviamo che $\tilde{v}_k \neq 0$, poiché $\tilde{w}_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$ e $w_k \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1}) = \text{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$. Inoltre $\tilde{v}_k$ è ortogonale a $v_1, \dots, v_{k-1}$, come segue da:

$$\begin{aligned} g(\tilde{v}_k, v_i) &= g(w_k, v_i) - g(\tilde{w}_k, v_i) = \\ &= g(w_k, v_i) - g(g(w_k, v_1)v_1 + \dots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1}, v_i) \\ &= g(w_k, v_i) - g(w_k, v_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Quindi ponendo $v_k := \frac{\tilde{v}_k}{\|\tilde{v}_k\|}$, i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono a due a due ortogonali e di norma $= 1$, perciò essi sono linearmente indipendenti e formano una base ortonormale di $\text{Span}(w_1, \dots, w_k)$. $\square$

Osservazione 8. La dimostrazione del precedente teorema fornisce un metodo effettivo, che chiameremo **procedimento di Gram-Schmidt**, per determinare una base ortonormale di uno spazio vettoriale Euclideo a partire da una base qualunque. Vediamo con un esempio come procedere. Consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^5$, con il prodotto scalare canonico $\langle, \rangle$:

$$V := \text{Span} \left(w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^5.$$

Osserviamo che $w_1, \dots, w_4$ sono linearmente indipendenti. Per determinare una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_4\}$ di V , procediamo come nella dimostrazione del Teorema 2. Definiamo dapprima

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = w_1, \quad (\|w_1\| = 1).$$

Per determinare v_2 , consideriamo prima

$$\tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

allora $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \tilde{v}_2$. Analogamente,

$$\tilde{v}_3 = w_3 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{quindi } v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Infine,}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_4 &= w_4 - \langle w_4, v_3 \rangle v_3 - \langle w_4, v_2 \rangle v_2 - \langle w_4, v_1 \rangle v_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$v_4 = \frac{\sqrt{105}}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Corollario 1. Ogni spazio vettoriale Euclideo (V, g) di dimensione finita (cioè $\dim(V) < \infty$) ha una base ortonormale.

Dim. Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una base di V . Applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $w_1, \dots, w_n$, otteniamo dei vettori $v_1, \dots, v_n$ che formano una base ortonormale di $\text{Span}(w_1, \dots, w_n) = V$. $\square$

Vediamo ora un esempio in cui il prodotto scalare non è quello canonico.

Esempio 6. Sia $V = \mathbb{R}[t]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nella indeterminata t , di grado ≤ 2 . Consideriamo il prodotto scalare g su V , $g(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Vogliamo determinare una base ortonormale per (V, g) .

A tale scopo applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori della base $\{1, t, t^2\}$ di V . Otteniamo i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|1\|} = 1, \quad \|1\| = \sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1 dt} = 1; \\ \tilde{v}_2 &= t - g(t, 1)1 = t - \left(\int_0^1 t dt\right)1 = t - \frac{1}{2}, \\ \|\tilde{v}_2\| &= \sqrt{g(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)} = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{4}) dt} = \sqrt{\frac{1}{12}} \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{12}(t - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2t - 1); \\ \tilde{v}_3 &= t^2 - g(t^2, v_2)v_2 - g(t^2, v_1)v_1 \\ &= t^2 - (\sqrt{3} \int_0^1 (2t^3 - t^2) dt) \sqrt{3}(2t - 1) - \int_0^1 t^2 dt \\ &= t^2 - \frac{1}{2}(2t - 1) - \frac{1}{3} = t^2 - t + \frac{1}{6} \\ \Rightarrow v_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(t^2 - t + \frac{1}{6}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(6t^2 - 6t + 1). \end{aligned}$$

Corollario 2. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora $V = W \oplus W^\perp$.

Dim. Osserviamo che $W \cap W^\perp = \{0\}$, perché l'unico vettore perpendicolare a se stesso è il vettore nullo. Quindi la somma $W + W^\perp$ è diretta e per la formula di Grassmann, $\dim(W \oplus W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$, quindi è sufficiente dimostrare che $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$. A tale scopo, scegliamo una base di W , $\{w_1, \dots, w_k\}$, e completiamola a base di V , $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$.

Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ ed otteniamo $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$. Dal Teorema 2 segue che: $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di W , $v_{k+1}, \dots, v_n \in W^\perp$ e sono linearmente indipendenti. Quindi $\dim(W^\perp) \geq n - k = \dim(V) - \dim(W)$. Siccome $\dim(W^\perp) \leq n - k$, poiché $W \oplus W^\perp \subseteq V$, segue che $\dim(W^\perp) = n - k$. $\square$

2.1 Proiezioni ortogonali

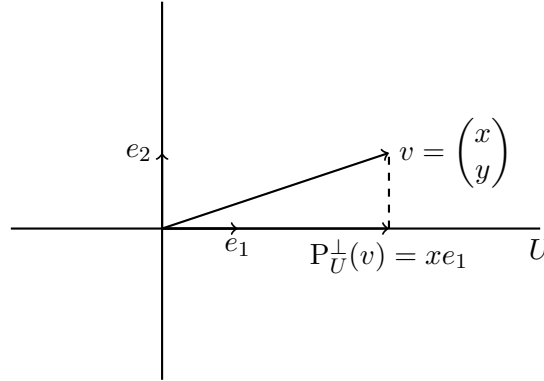
Definizione 11. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare $g|_U$ indotto da g (Osservazione 5). La **proiezione ortogonale** da V ad U è l'endomorfismo $P_U^\perp: V \rightarrow V$ definito come segue:

$$P_U^\perp(v) := g(v, v_1)v_1 + \dots + g(v, v_k)v_k, \quad \forall v \in V.$$

Osservazione 9. La linearità di $P_U^\perp$ segue direttamente dalla bilinearità di g .

Esempio 7. 1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $\{e_1, e_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Sia $U = \text{Span}(e_1)$. Allora, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$P_U^\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, e_1 \right\rangle e_1 = x e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Osserviamo che $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_U^\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in U^\perp$.

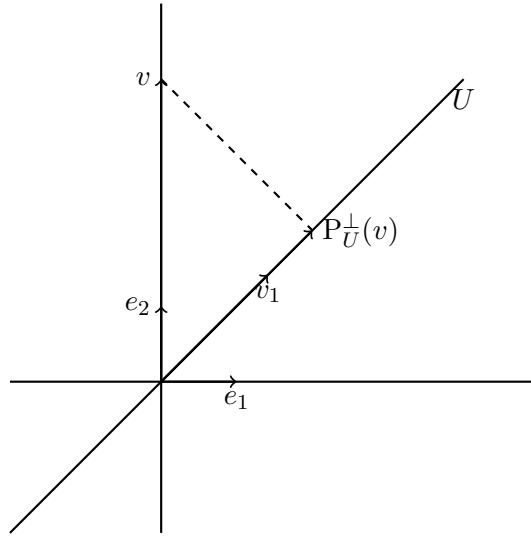
Analogamente, se $W = \text{Span}(e_2)$, allora $P_W^\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, ed inoltre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_W^\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in W^\perp$.

2. Consideriamo ancora $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia ora $U = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per determinare $P_U^\perp$, consideriamo il vettore $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che forma

una base ortonormale di U . Allora, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$P_U^\perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, se $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_U^\perp(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Vediamo ora alcune proprietà delle proiezioni ortogonali. Da queste segue, in particolare, che $P_U^\perp$ non dipende dalla base ortonormale scelta di U .

Proposizione 9. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V , e sia $P_U^\perp: V \rightarrow V$ la proiezione ortogonale da V in U definita nella Definizione 11. Allora, $\forall v \in V$, valgono le seguenti proprietà:*

1. $v - P_U^\perp(v) \in U^\perp$;
2. $P_U^\perp(v) \in U$, inoltre $P_U^\perp(v)$ è l'unico vettore di U tale che vale 1.;
3. la definizione di $P_U^\perp(v)$ data in Definizione 11 non dipende dalla base ortonormale $\{v_1, \dots, v_k\}$ di U scelta;
4. $P_U^\perp$ coincide con la proiezione P_U di V su U indotta dalla decomposizione $V = U \oplus U^\perp$ (Corollario 2), come definita nel Capitolo 8, Esempio 1.4. In particolare, $\text{im}(P_U^\perp) = U$, $\text{ker}(P_U^\perp) = U^\perp$;
5. $P_U^\perp(v)$ è l'elemento di U "più vicino a v ", cioè tale che $\|v - P_U^\perp(v)\| = \min\{\|v - u\| \mid u \in U\}$.

Dim. 1. Osserviamo che è sufficiente dimostrare che $(v - P_U^\perp(v)) \perp v_i, \forall i = 1, \dots, k$, dove $\{v_1, \dots, v_k\}$ è la base ortonormale di U scelta nella Definizione 11. Questo segue dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} g(v - P_U^\perp(v), v_i) &= g(v, v_i) - g(P_U^\perp(v), v_i) \\ &= g(v, v_i) - g(g(v, v_1)v_1 + \dots + g(v, v_k)v_k, v_i) \\ &= g(v, v_i) - g(v, v_i) = 0. \end{aligned}$$

2. Chiaramente $P_U^\perp(v) \in U$, poichè combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_k$ della base scelta di U . Sia $u = c_1v_1 + \dots + c_kv_k \in U$ un altro vettore di U , tale che $v - u \in U^\perp$. Allora, $\forall i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} 0 &= g(v - u, v_i) = g(v, v_i) - g(u, v_i) \\ &= g(v, v_i) - c_i. \end{aligned}$$

Quindi $c_i = g(v, v_i), \forall i = 1, \dots, k$, quindi $u = P_U^\perp(v)$.

3. Questa proprietà segue direttamente dalla proprietà 2.

4. Siccome $v = P_U^\perp(v) + (v - P_U^\perp(v))$, $P_U^\perp(v) \in U$, e $v - P_U^\perp(v) \in U^\perp$, questa proprietà segue dal fatto che $V = U \oplus U^\perp$ (Corollario 2) e dalla definizione di P_U (Esempio 1.4. del Capitolo 8).

5. Per ogni $u \in U$, siccome $v - P_U^\perp(v) \perp P_U^\perp(v) - u$, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|(v - P_U^\perp(v)) + (P_U^\perp(v) - u)\|^2 \\ &= \|v - P_U^\perp(v)\|^2 + \|P_U^\perp(v) - u\|^2. \end{aligned}$$

Quindi $\|v - u\|^2 \geq \|v - P_U^\perp(v)\|^2$, e vale l'uguaglianza se e solo se $\|P_U^\perp(v) - u\|^2 = 0$, cioè se e solo se $u = P_U^\perp(v)$. $\square$

2.2 Isometrie e matrici ortogonali

Definizione 12. Siano (V, g) e (W, h) due spazi vettoriali Euclidei. Una **isometria** da (V, g) a (W, h) è una applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ tale che, $\forall u, v \in V$, vale la seguente uguaglianza: $h(f(u), f(v)) = g(u, v)$.

Una isometria da (V, g) in (V, g) verrà detta **isometria di (V, g)** .

Osservazione 10. 1. Se $f: V \rightarrow W$ è una isometria da (V, g) a (W, h) , allora f è iniettiva. Infatti, se $v \in \ker(f)$, allora $f(v) = 0$, quindi $h(f(v), f(v)) = h(0, 0) = 0$. Sfruttando ora il fatto che f è una isometria abbiamo: $0 = h(f(v), f(v)) = g(v, v)$, quindi $v = 0$.

2. Sia (V, g) uno spazio Euclideo di dimensione finita. Sia f una isometria di (V, g) . Allora f è un automorfismo. Questo segue dalla precedente osservazione e dal Corollario 2 del Capitolo 8.

Proposizione 10. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. f è una isometria di (V, g) .
2. Per ogni base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) , anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .
3. $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$.

Dim. $(1 \Rightarrow 2)$ Se $f \in \text{End}(V)$ è una isometria, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di (V, g) , allora $g(f(v_i), f(v_j)) = g(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Quindi $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono tutti non nulli (perché hanno norma = 1) e sono a due a due ortogonali. Dalla Proposizione 7 segue quindi che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, perciò $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) .

$(2 \Rightarrow 3)$ Fissiamo una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di (V, g) . Per ipotesi anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base ortonormale di (V, g) . Sia ora $v \in V$. Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$: $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora $f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$. Siccome $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale, $\|v\|^2 = g(v, v) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$. Siccome anche $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è ortonormale, $\|f(v)\|^2 = g(f(v), f(v)) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$. Ne segue che $\|v\|^2 = \|f(v)\|^2$, da cui il risultato.

$(3 \Rightarrow 1)$ Siano $v, w \in V$. Dalla formula di polarizzazione (Proposizione 1) si ha:

$$\begin{aligned} g(f(v), f(w)) &= \frac{1}{2} \left[g(f(v) + f(w), f(v) + f(w)) - g(f(v), f(v)) - g(f(w), f(w)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|f(v) + f(w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|f(v + w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Per ipotesi, $\|f(u)\|^2 = \|u\|^2, \forall u \in V$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|f(v + w)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(w)\|^2 \right] &= \frac{1}{2} \left[\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right] \\ &= g(v, w), \end{aligned}$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula di polarizzazione. Ne segue che $g(f(v), f(w)) = g(v, w), \forall v, w \in V$, quindi f è una isometria. $\square$

Proposizione 11. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di (V, g) . Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora f è una isometria di (V, g) se e solo se ${}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = I_n$.*

Dim. Dalla precedente proposizione segue che f è una isometria $\Leftrightarrow g(f(v_i), f(v_j)) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Per definizione di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, se indichiamo con a_{ij} il suo elemento di posto (i, j) , abbiamo: $f(v_\ell) = a_{1\ell}v_1 + \dots + a_{n\ell}v_n, \forall \ell = 1, \dots, n$. Quindi f è una isometria $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$. Il risultato segue ora dal fatto che $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}$ è l'elemento di posto (i, j) della matrice ${}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. $\square$

Definizione 13. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è detta **ortogonale** se vale la seguente uguaglianza: ${}^tA \cdot A = I_n$. L'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali si denota con $O(n)$.

Osservazione 11. 1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\Leftrightarrow A$ è invertibile ed $A^{-1} = {}^tA$.
2. Sia $A \in O(n)$, allora $\det(A) = \pm 1$. Infatti, dall'uguaglianza $I_n = {}^tA \cdot A$, dal teorema di Binet, sfruttando il fatto che $\det({}^tA) = \det(A)$, si ha:

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tA \cdot A) = (\det(A))^2.$$

Esempio 8. 1. $O(1) = \{(1), (-1)\}$.

2. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale. Osserviamo che, in tal caso $\det(A) = 1$, ed $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresenta la rotazione nel piano $\mathbb{R}^2$ intorno all'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di un angolo θ in senso antiorario.

3. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale. In questo caso $\det(A) = -1$, ed $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresenta la riflessione nel piano $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta passante per l'origine inclinata di un angolo pari a $\frac{\theta}{2}$ (misurato in senso antiorario) rispetto alla retta $\text{Span}(e_1)$.

Il seguente risultato è una riformulazione della Proposizione 11.

Corollario 3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n) \Leftrightarrow L_A$ è una isometria di $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$, dove $\langle, \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.

Dim. L'enunciato segue dalla Proposizione 11 ricordando che la base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale per $\langle, \rangle$, ed $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = A$. $\square$

Proposizione 12. Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n . Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di (V, g) , e sia $\mathcal{C}$ una base di V . Allora, $\mathcal{C}$ è ortonormale $\Leftrightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \in O(n)$.

Dim. Osserviamo che $\mathcal{C}$ è ortonormale $\Leftrightarrow M_{\mathcal{C}}(g) = I_n$, dove $M_{\mathcal{C}}(g)$ è la matrice che rappresenta il prodotto scalare g rispetto alla base $\mathcal{C}$ (Definizione 4). Dalla Proposizione 5 abbiamo: $M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$. Siccome $\mathcal{B}$ è ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(g) = I_n$, quindi la precedente formula diventa: $M_{\mathcal{C}}(g) = {}^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_V)$, da cui segue il risultato. $\square$

Corollario 4. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $A \in O(n)$ se e solo se le colonne di A , $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.*

Il seguente risultato afferma che le matrici degli esempi 8.2. ed 8.3. sono tutte e sole le matrici 2×2 ortogonali.

Proposizione 13. *Sia $A \in O(2)$. Allora:*

- se $\det(A) = 1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$;
- se $\det(A) = -1$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tale che $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Quindi le matrici ortogonali 2×2 sono tutte e sole le matrici aventi una delle forme precedenti.

Dim. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora, per definizione, A è ortogonale se e solo se $I_2 = {}^t A \cdot A$, cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni $a^2 + c^2 = 1$ e $b^2 + d^2 = 1$, segue che i punti $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ appartengono alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine in $\mathbb{R}^2$. In particolare esistono $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tali che $a = \cos \varphi$, $c = \sin \varphi$, $b = \cos \psi$ e $d = \sin \psi$. Dalla equazione $ab + cd = 0$ deduciamo che i vettori $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sono ortogonali tra di loro, quindi $\varphi - \psi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, oppure $\varphi - \psi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Nel primo caso, $b = \cos \psi = \sin \varphi$ e $d = \sin \psi = -\cos \varphi$, quindi $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$. Mentre nel secondo caso, $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. $\square$

Descriviamo ora le matrici ortogonali 3×3 . Osserviamo che, se $A \in O(3)$, allora $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$, infatti il polinomio caratteristico $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha grado 3 e quindi ha almeno una radice reale (si noti che questo argomento vale $\forall A \in M_3(\mathbb{R})$).

Lemma 1. *Sia $A \in O(n)$, e sia $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Allora $\lambda = \pm 1$.*

Dim. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore λ , quindi $v \neq 0$ e $A \cdot v = \lambda v$. Poiché $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una isometria, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\langle v, v \rangle = \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Siccome $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$, segue che $\lambda^2 = 1$, da cui il risultato. $\square$

Sia $A \in O(3)$, e sia $v \in \mathbb{R}^3$ un suo autovettore. Per il Corollario 2, $\mathbb{R}^3 = \text{Span}(v) \oplus \text{Span}(v)^\perp$, inoltre le restrizioni di L_A ai sottospazi $\text{Span}(v)$ e $\text{Span}(v)^\perp$ sono delle isometrie $(L_A)|_{\text{Span}(v)}: \text{Span}(v) \rightarrow \text{Span}(v)$, $(L_A)|_{\text{Span}(v)^\perp}: \text{Span}(v)^\perp \rightarrow \text{Span}(v)^\perp$, rispetto ai prodotti scalari indotti da quello canonico di $\mathbb{R}^3$. Questo segue dal fatto che, se $w \in \text{Span}(v)^\perp$, allora $L_A(w) \in \text{Span}(v)^\perp$, poiché $\langle L_A(w), v \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle L_A(w), L_A(v) \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle w, v \rangle = 0$, dove $\lambda (= \pm 1)$ è l'autovalore di v .

Sia ora $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, con $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Osserviamo che $\{v_2, v_3\}$ è una base ortonormale di $\text{Span}(v)^\perp$. Quindi, dalla Proposizione 13 segue che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(L_A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

dove $B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in O(2)$. Distinguiamo i seguenti casi.

- $\det(A) = 1$. Allora $\lambda \det(B) = 1$. Se $\lambda = 1$, allora $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Quindi L_A è una **rotazione** di un angolo θ intorno alla retta $\text{Span}(v)$ (che si chiama asse di rotazione).

Se $\lambda = -1$, allora $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Quindi

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso L_A è una **rotazione** di 180° intorno ad una retta (asse di rotazione).

- $\det(A) = -1$. Allora $\lambda \det(B) = -1$. Quindi, se $\lambda = 1$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ed L_A è una **riflessione** rispetto ad un piano. Mentre se $\lambda = -1$, allora

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ per qualche } \theta \in \mathbb{R}, \text{ quindi } L_A \text{ è una } \mathbf{riflessione}$$

rotatoria, cioè la composizione di una rotazione con la riflessione rispetto ad un piano perpendicolare all'asse della rotazione.

3 Il prodotto vettoriale

In questa sezione consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$.

Definizione 14. Siano $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Il **prodotto vettoriale** di v e w è il vettore $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ definito come segue:

$$v \wedge w := \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -a_1 c_2 + a_2 c_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Un'altra notazione usata frequentemente per il prodotto vettoriale di v e w è $v \times w$.

Osservazione 12. Osserviamo che le coordinate di $v \wedge w$ rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono i determinanti dei minori 2×2 della matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, precisamente,

$$v \wedge w = e_1 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si noti che il lato destro di (1) coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del “determinante della matrice” $\begin{pmatrix} e_1 & a_1 & a_2 \\ e_2 & b_1 & b_2 \\ e_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

La precedente interpretazione del prodotto vettoriale, oltre a fornire un utile metodo per il calcolo, ne mette in luce molte delle sue proprietà, come riportato nella seguente proposizione.

Proposizione 14. Siano $u, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$; $(cv) \wedge w = c(v \wedge w)$.
2. $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$; $v \wedge (cw) = c(v \wedge w)$.
3. $v \wedge w = -w \wedge v$.
4. $\langle u, v \wedge w \rangle = \det \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, dove $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
5. $v \wedge w \perp v, w$.
6. $v \wedge w = 0 \Leftrightarrow v, w$ sono linearmente dipendenti.

7. $\|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin \theta$, dove θ è l'angolo convesso tra v e w . Inoltre $\|v \wedge w\|$ coincide con l'area del parallelogramma di vertici $0, v, w$ e $v + w$.

Dim. 1,2 e 3 seguono direttamente dalle proprietà D1 e D2 del determinante.

4. Dall'equazione (1) abbiamo:

$$\langle v, v \wedge w \rangle = a \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

che coincide con lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del determinante

$$\text{di } \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

5. Dalla proprietà 4 segue che $\langle v, v \wedge w \rangle = \det(v, v, w) = 0$, poiché la matrice (v, v, w) ha due colonne uguali. Quindi $v \perp v \wedge w$. Analogamente si dimostra che $w \perp v \wedge w$.

6. Per l'Osservazione 12, sfruttando il Teorema 4 del Capitolo 5, si ha che:

$$v \wedge w = 0 \Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} < 2. \text{ Equivalentemente, } v \wedge w = 0 \Leftrightarrow v, w \text{ sono}$$

linearmente dipendenti.

7. Questa proprietà è conseguenza immediata delle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \|v \wedge w\|^2 &= (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\cos \theta)^2 \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 (1 - (\cos \theta)^2) \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (\sin \theta)^2. \end{aligned}$$

□

Osservazione 13. Osserviamo che il prodotto vettoriale non soddisfa la proprietà associativa. Ad esempio

$$e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2 \neq 0 = (e_1 \wedge e_1) \wedge e_2.$$

4 Spazi Euclidei

Definizione 15. Uno *spazio Euclideo* $\mathbb{E}$ è uno spazio affine su uno spazio vettoriale Euclideo (V, g) .

Esempio 9. Sia $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ lo spazio affine definito nell'Esempio 2.3. del Capitolo 7. Se consideriamo $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$, otteniamo lo spazio vettoriale Euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$. Lo spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ sullo spazio vettoriale Euclideo $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ è uno spazio Euclideo, che denoteremo con $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ o semplicemente con $\mathbb{R}^n$.

Definizione 16. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio Euclideo sullo spazio vettoriale Euclideo (V, g) . Un **riferimento Cartesiano** su $\mathbb{E}$ è un riferimento affine (Definizione 3 del Capitolo 7) $O, \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{E}$, tale che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base ortonormale di (V, g) .

La seguente proposizione fornisce la formula del cambiamento di coordinate rispetto a due riferimenti Cartesiani. La dimostrazione è lasciata per esercizio (si veda la sezione 3.2 del Capitolo 8).

Proposizione 15. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio Euclideo su (V, g) . Siano $O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ed $O', \mathcal{C} = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ due riferimenti Cartesiani di $\mathbb{E}$. Per ogni punto $P \in \mathbb{E}$, se $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di P rispetto ad $O, \mathcal{B}$, e $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di P rispetto ad $O', \mathcal{C}$, allora

$$\mu = A \cdot \lambda + c,$$

dove $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \in O(n)$ (Proposizione 12), e $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di

O rispetto ad $O', \mathcal{C}$.

La geometria in spazi affini (Capitolo 7) si basava sui concetti di parallelismo ed incidenza. Negli spazi Euclidei possiamo introdurre anche alcune nozioni metriche (distanze, misure di angoli, ecc.), come vedremo di seguito.

Definizione 17. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio Euclideo su (V, g) . Per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbb{E}$, la **distanza** tra P e Q si definisce come segue:

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})}.$$

Osservazione 14. Sia $O, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un riferimento Cartesiano di $\mathbb{E}$, e siano $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ le coordinate di P, Q , rispettivamente. Allora

$$d(P, Q) = \sqrt{(\lambda_1 - \mu_1)^2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)^2}.$$

Vediamo ora alcune proprietà della distanza tra punti, che seguono direttamente dalle proprietà della norma (Proposizione 6). La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Proposizione 16. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio Euclideo su (V, g) . Allora valgono le seguenti affermazioni.

1. $\forall P, Q \in \mathbb{E}, d(P, Q) \geq 0$, ed è $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
2. $d(P, Q) = d(Q, P), \forall P, Q \in \mathbb{E}$.
3. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R), \forall P, Q, R \in \mathbb{E}$.

4.1 Angolo convesso tra due rette orientate

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio Euclideo su (V, g) . Sia $r \subseteq \mathbb{E}$ una retta (cioè un sottospazio affine di dimensione 1) con giacitura $W \subseteq V$. Un vettore $v \in W$ di norma $\|v\| = 1$ è detto un **versore** di r . Osserviamo che ci sono esattamente due versori per una retta r , v e $-v$.

Definizione 18. Una **retta orientata** è una retta $r \subseteq \mathbb{E}$ per cui si è scelto un versore v , essa verrà denotata anche con (r, v) .

Siano (r_1, v_1) ed (r_2, v_2) due rette orientate nello spazio Euclideo $\mathbb{E}$. L'**angolo convesso** tra (r_1, v_1) ed (r_2, v_2) è l'angolo convesso tra i versori v_1, v_2 (Definizione 9), cioè $\theta \in [0, \pi]$ tale che $\cos \theta = g(v_1, v_2)$ (osserviamo che $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$).

Due rette $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{E}$ sono **ortogonali** se le rispettive giaciture W_1 e W_2 sono ortogonali tra di loro, cioè se $v \perp w$, $\forall v \in W_1$ e $\forall w \in W_2$. Rette ortogonali sono anche dette **perpendicolari** e si usa il simbolo $r_1 \perp r_2$.

Esempio 10. 1. Consideriamo lo spazio Euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. Consideriamo la retta $r \subseteq \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione Cartesiana $ax + by = c$. Allora i versori di r sono: $\pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

2. Siano $r_1 : a_1x + b_1y = c_1$ ed $r_2 : a_2x + b_2y = c_2$ due rette di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. Le possibili orientazioni di r_1 ed r_2 sono date dai versori

$$v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Scelta un'orientazione per r_1 e per r_2 , l'angolo convesso tra le rette orientate è $\theta \in [0, \pi]$ tale che $\cos \theta = \langle v_1, v_2 \rangle$. Quindi

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

3. Siano

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + t\lambda_1 \\ y = y_1 + t\mu_1 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + t\lambda_2 \\ y = y_2 + t\mu_2 \end{cases}$$

due rette di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ in forma parametrica. Allora i possibili versori sono

$$v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il coseno dei due angoli convessi è dato dalla formula seguente:

$$\cos \theta = \pm \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} \sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}.$$

4.2 Distanza tra un punto ed una retta di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$

Siano P un punto ed r una retta di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. La **distanza tra P ed r** , $d(P, r)$, si definisce come la distanza $d(P, N)$ tra il punto P ed il punto N di intersezione tra r e la retta perpendicolare ad r passante per P . Il punto N si chiama il piede dalla perpendicolare ad r passante per P .

Proposizione 17. Se $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ed r ha equazione Cartesiana $ax + by = c$, allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dim. Sia $r_1 \subset \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ la retta perpendicolare ad r passante per P . Allora r_1 ha equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb. \end{cases}$$

$N = \begin{pmatrix} x_0 + \tau a \\ y_0 + \tau b \end{pmatrix}$, dove $\tau \in \mathbb{R}$ è tale che $a(x_0 + \tau a) + b(y_0 + \tau b) = c$. Risolvendo quest'ultima equazione otteniamo: $\tau = \frac{c - ax_0 - by_0}{a^2 + b^2}$. Quindi

$$\begin{aligned} d(P, r) &= d(P, N) \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 + \frac{c - ax_0 - by_0}{a^2 + b^2} a \\ y_0 + \frac{c - ax_0 - by_0}{a^2 + b^2} b \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{|c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

□

Definizione 19. Siano ora r_1 ed r_2 due rette parallele di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. Allora la distanza tra r_1 ed r_2 si definisce come segue:

$$d(r_1, r_2) := d(P, r_1)$$

dove $P \in r_2$ è un punto qualsiasi.

4.3 Angolo convesso tra due piani di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

Sia $p \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ un piano di giacitura W . Un **versore normale** a p è un versore $n \in \mathbb{R}^3$ (cioè un vettore di norma $\|n\| = 1$) tale che $n \in W^\perp$. Osserviamo che, siccome $\dim(W^\perp) = 1$, ci sono esattamente due versori normali a p , $\pm n$.

Se p ha equazione Cartesiana

$$p : ax + by + cz = d,$$

allora $W^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, quindi i versori normali a p sono $n = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Definizione 20. Un **piano orientato** di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ è una coppia (p, n) , dove $p \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ è un piano ed n è un versore normale a p .

L'**angolo convesso** tra due piani orientati (p_1, n_1) e (p_2, n_2) di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si definisce come l'angolo convesso θ tra i versori n_1 ed n_2 , cioè $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo il cui coseno è pari a $\cos \theta = \langle n_1, n_2 \rangle$.

Due piani $p_1, p_2 \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si dicono **perpendicolari** (o anche **ortogonali**), se i sottospazi $W_1^\perp, W_2^\perp \subset \mathbb{R}^3$ sono ortogonali tra di loro, cioè se $v \perp w$, $\forall v \in W_1^\perp$ e $\forall w \in W_2^\perp$, dove W_1 e W_2 sono le giaciture di p_1 e p_2 , rispettivamente. In tal caso scriveremo $p_1 \perp p_2$.

Osserviamo che, se $p_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $p_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, allora

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}},$$

dove il segno $\pm$ dipende dalle orientazioni scelte. I piani sono ortogonali, se $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

4.4 Angolo tra una retta ed un piano di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

Definizione 21. Siano (r, v) una retta orientata e (p, n) un piano orientato contenuti in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$. L'**angolo compreso** tra (r, v) e (p, n) si definisce come $\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$, dove φ è l'angolo convesso tra n e v .

Una retta r ed un piano p di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si dicono **perpendicolari** (o anche **ortogonali**) se $U = W^\perp$, dove U è la giacitura di r e W è la giacitura di p . In tal caso scriveremo $r \perp p$, oppure $p \perp r$.

Osserviamo che $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ quindi è univocamente determinato da $\sin \theta$, inoltre $r \perp p \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

Supponiamo che r sia data da equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x &= x_0 + t\lambda \\ y &= y_0 + t\mu \\ z &= z_0 + t\nu, \end{cases}$$

e p dall'equazione Cartesiana $ax + by + cz = d$. Allora i versori di direzione di r sono $v = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$, ed i versori normali a p sono $n = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Quindi,

$$\sin \theta = -\cos \varphi = -\frac{a\lambda + b\mu + c\nu}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}.$$

4.5 Distanza tra un punto ed un piano. Distanza tra un punto ed una retta

Definizione 22. La distanza tra un punto P ed un piano p di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si definisce come $d(P, p) := d(P, N)$, dove N è il punto di intersezione tra p e la retta perpendicolare a p passante per P . N si chiama il piede della perpendicolare a p passante per P .

Riportiamo la seguente proposizione la cui dimostrazione è lasciata per esercizio (si può procedere in modo analogo alla dimostrazione della Proposizione 17).

Proposizione 18. Sia $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ e $p \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ il piano di equazione Cartesiana $ax + by + cz = d$. Allora

$$d(P, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Definizione 23. La distanza tra un punto P ed una retta r di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si definisce come $d(P, r) := d(P, N)$, dove N è il punto di intersezione tra r ed il piano perpendicolare ad r passante per P .

Vale il seguente risultato.

Proposizione 19. Sia $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, e sia $r \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= \tilde{x} + t\lambda \\ y &= \tilde{y} + t\mu \\ z &= \tilde{z} + t\nu. \end{cases}$$

Allora

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{\left[\nu(y_0 - \tilde{y}) - \mu(z_0 - \tilde{z})\right]^2 + \left[\nu(x_0 - \tilde{x}) - \lambda(z_0 - \tilde{z})\right]^2 + \left[\mu(x_0 - \tilde{x}) - \lambda(y_0 - \tilde{y})\right]^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}.$$

Dim. Sia $Q := \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \in r$. Per le proprietà che definiscono uno spazio affine,

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP}$. Osserviamo che i vettori $\overrightarrow{NQ}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente

dipendenti poiché $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ genera la giacitura di r ed $N, Q \in r$. Di conseguenza, sfruttando il punto 6 della Proposizione 14, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP}.$$

Dal punto 7 della Proposizione 14 si ha che

$$\left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP} \right\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \cdot \|\overrightarrow{NP}\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \cdot d(P, r),$$

si osservi che $\overrightarrow{NP} \perp \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$. Quindi

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{NP} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{QP} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} \left\| \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_0 - \tilde{x} \\ y_0 - \tilde{y} \\ z_0 - \tilde{z} \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (2)$$

Il risultato segue ora sostituendo in (2) le coordinate del prodotto vettoriale (Definizione 14). $\square$

4.6 Distanza tra due rette di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

Siano $r_1, r_2 \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ due rette. Se r_1 ed r_2 sono parallele, allora sono complanari, quindi per definire la distanza tra di loro si usa la Definizione 19. Se r_1 ed r_2 sono incidenti, allora si pone $d(r_1, r_2) = 0$. Supponiamo quindi che r_1 ed r_2 non siano complanari. Allora vale il seguente lemma.

Lemma 2. *Siano $r_1, r_2 \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ due rette non complanari. Allora esistono e sono unici due punti, $N_1 \in r_1$ ed $N_2 \in r_2$, tale che la retta passante per N_1 ed N_2 è perpendicolare sia ad r_1 che ad r_2 .*

Dim. Sia $v_i \in \mathbb{R}^3$ un vettore che genera la giacitura di r_i , per ogni $i = 1, 2$. Siccome r_1 ed r_2 non sono complanari, esse non sono parallele, quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Di conseguenza il prodotto vettoriale $v_1 \wedge v_2 \neq 0$

ed inoltre $v_i \perp (v_1 \wedge v_2)$, $\forall i = 1, 2$ (Proposizione 14). Consideriamo il piano $p \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ contenente r_1 ed avente giacitura $\text{Span}(v_1, v_1 \wedge v_2)$. Allora $N_2 = p \cap r_2$ (osservare che p non è parallelo ad r_2) ed N_1 è il punto di intersezione tra r_1 e la retta contenuta in p perpendicolare ad r_1 e passante per N_2 . $\square$

Definizione 24. Siano $r_1, r_2 \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ due rette non complanari. Allora la distanza tra r_1 ed r_2 si definisce come segue: $d(r_1, r_2) := d(N_1, N_2)$, dove $N_1 \in r_1$ ed $N_2 \in r_2$ sono i punti come nell'enunciato del Lemma 2.

Proposizione 20. Siano $r_1, r_2 \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ due rette non complanari date dalle seguenti equazioni parametriche:

$$r_1 : Q_1 + tv_1, \quad r_2 : Q_2 + tv_2.$$

$$\text{Allora } d(r_1, r_2) = \frac{|\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1 Q_2} \rangle|}{\|v_1 \wedge v_2\|}.$$

Dim. Osserviamo che $\overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overrightarrow{Q_1 N_1} + \overrightarrow{N_1 N_2} + \overrightarrow{N_2 Q_2}$. Inoltre, siccome $\overrightarrow{Q_i N_i}$ e v_i sono linearmente dipendenti, $\forall i = 1, 2$, si ha che $\overrightarrow{Q_i N_i} \perp v_1 \wedge v_2$, $\forall i = 1, 2$. Di conseguenza $\langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{Q_1 Q_2} \rangle = \langle v_1 \wedge v_2, \overrightarrow{N_1 N_2} \rangle = \pm \|v_1 \wedge v_2\| \cdot \|\overrightarrow{N_1 N_2}\|$, da cui segue il risultato. $\square$