

Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: PRODOTTI SCALARI E FORME BILINEARI

1. Sia $(V, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale Euclideo. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

i) Se $v \in V$ è tale che $\langle v, w \rangle = 0, \forall w \in V$, allora $v = 0$.

ii) Se $v, w \in V$ sono due vettori ortogonali, allora $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$. Si confronti questa affermazione con il teorema di Pitagora.

2. Siano $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ due applicazioni lineari. Si dimostri che la funzione

$$F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad F(v, w) = f(v) \cdot g(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3,$$

è una forma bilineare su $\mathbb{R}^3$. Si dica se esistono f, g , tali che F sia simmetrica, rispettivamente un prodotto scalare.

3. Si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 , $V = \mathbb{R}[t]_3$. Si dimostri che

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

è un prodotto scalare su V . Si determini un'equazione cartesiana del sottospazio $\{P\}^\perp \subseteq V$ ortogonale a $P = t^2 + 1$.

4. Si consideri lo spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti nel campo dei numeri reali, $V = M_2(\mathbb{R})$. Sia

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot {}^t B),$$

dove, per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$, $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ è la traccia di A , ${}^t A$ è la trasposta di A , $A \cdot {}^t B$ è il prodotto righe per colonne di A e ${}^t B$. Si dimostri che $\langle, \rangle$ è un prodotto scalare su V e si trovi una base di V ortonormale per $\langle, \rangle$.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino $\|A\|$, $\|B\|$, e $\langle A, B \rangle$.

5. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la seguente forma bilineare:

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g({}^t(x_1, x_2, x_3), {}^t(y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_3.$$

Si dica se g è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.