Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

10. Il teorema spettrale

Definizione 1. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ è detto* ***autoaggiunto*** *rispetto al prodotto scalare g se e solo se*

$$g(f(v), w) = g(v, f(w)), \quad \forall v, w \in V.$$

Endomorfismi autoaggiunti vengono talvolta chiamati **simmetrici** poiché sono rappresentati rispetto a basi ortonormali da matrici simmetriche. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di (V, g). Allora f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g se e solo se la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$, $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, è simmetrica.*

Dim. Per semplicità di notazione sia $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$. Ricordiamo che, siccome $\mathcal{B}$ è ortonormale, la matrice che rappresenta il prodotto scalare g rispetto a $\mathcal{B}$ è $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{I}_n$, dove $n = \dim(V)$. Sfruttando la Proposizione 2 del Capitolo 8 e la Proposizione 3 del Capitolo 9 si ha che: $\forall v, w \in V$, se $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sono le coordinate di v, w, rispettivamente, rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora

$$\begin{aligned} g(f(v), w) &= {}^t(A \cdot \lambda) \cdot \mathrm{I}_n \cdot \mu \\ &= {}^t\lambda \cdot {}^tA \cdot \mu, \end{aligned}$$

ed analogamente

$$g(v, f(w)) = {}^t\lambda \cdot A \cdot \mu.$$

Quindi f è autoaggiunto se e soltanto se

$$ {}^t\lambda \cdot {}^tA \cdot \mu = {}^t\lambda \cdot A \cdot \mu, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Ne segue che, se A è simmetrica, allora f è autoaggiunto. Viceversa, se f è autoaggiunto, sostituendo $\lambda = e_i$ e $\mu = e_j$ nella (1) si ha l'uguaglianza $a_{ji} = a_{ij}$, dove $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Quindi A è simmetrica. $\square$

Il seguente lemma afferma che la condizione 1 del Teorema 6 del capitolo 8 è sempre verificata se f è un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, equivalentemente se $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è simmetrica.

Lemma 1. *Valgono le seguenti affermazioni.*

1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora il polinomio caratteristico $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha n radici reali (non necessariamente distinte).*

2. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione n. Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è autoaggiunto rispetto a g allora $P_f(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha n radici reali (non necessariamente distinte).*

Dim. 1. Possiamo considerare $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ come polinomio a coefficienti complessi, $P_A(t) \in \mathbb{C}[t]$ (poiché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(t)$ ha n radici complesse. Dimostriamo ora che ogni radice complessa λ di $P_A(t)$ appartiene ad $\mathbb{R}$.

Consideriamo A come una matrice a coefficienti complessi, abbiamo quindi l'endomorfismo $L_A \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $L_A(v) = A \cdot v$. Siccome λ è una radice del polinomio caratteristico di A, λ è un autovalore di L_A (Corollario 7 del Capitolo 8). Sia $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un atovettore di L_A corrispondente all'autovalore λ. Vale quindi la seguente uguaglianza: $A \cdot v = \lambda v$. Inoltre, siccome i coefficienti di A sono numeri reali, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$
{}^t v \cdot A \cdot \bar{v} = {}^t v \cdot (A \cdot \bar{v}) = {}^t v \cdot (\overline{A \cdot v}) = {}^t v \cdot (\overline{\lambda v}) = \bar{\lambda}\, {}^t v \cdot \bar{v}\,,
$$

dove $\bar{v}, \overline{A \cdot v}$ sono i vettori di $\mathbb{C}^n$ ottenuti da $v, A \cdot v \in \mathbb{C}^n$, rispettivamente, coniugando tutte le coordinate. D'altro canto, siccome A è simmetrica,

$$
{}^t v \cdot A \cdot \bar{v} = ({}^t v \cdot A) \cdot \bar{v} = {}^t(A \cdot v) \cdot \bar{v} = {}^t(\lambda v) \cdot \bar{v} = \lambda\, {}^t v \cdot \bar{v}\,.
$$

Quindi $\bar{\lambda}\, {}^t v \cdot \bar{v} = \lambda\, {}^t v \cdot \bar{v}$ e siccome ${}^t v \cdot \bar{v} > 0$ segue che $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di (V, g). Per la Proposizione 1 $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica. Il risultato segue ora dal punto 1 e dal fatto che $P_f(t) = P_{\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t)$. □

Teorema 1 (Teorema spettrale)**.** *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di (V, g) che diagonalizza f.*

Dim. Procediamo per induzione sulla dimensione n di V. Se $n = 1$ allora ogni base $\{v_1\}$ di V diagonalizza f, quindi in questo caso l'enunciato segue ponendo $\mathcal{B} = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}\}$.

Supponiamo ora che l'enunciato sia vero per spazi vettoriali di dimensione $n - 1$. Siccome f è autoaggiunto, per il Lemma 1 esiste un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di f. Sia $v \in V \setminus \{0\}$ un autovettore di f con autovalore corrispondente λ. Sia $U := \{v\}^\perp$ il sottospazio vettoriale di V ortogonale a v (Definizione 9 del Capitolo 9). Osserviamo che $f(u) \in U$, $\forall u \in U$, come segue dalle seguenti uguaglianze:

$$
g(f(u), v) = g(u, f(v)) = g(u, \lambda v) = \lambda g(u, v) = 0\,.
$$

Quindi la restrizione di f ad U definisce un endomorfismo di U, $f_U: U \to U$ (ricordiamo che per definizione di restrizione di una funzione $f_U(u) := f(u)$, $\forall u \in U$). Consideriamo ora la restrizione $g_{|U}$ del prodotto scalare g ad U. Come osservato nel Capitolo 9 (Osservazione 5), $(U, g_{|U})$ è uno spazio vettoriale Euclideo. Inoltre $\dim(U) = n-1$ (come segue dal Corollario 2 del Capitolo 9, poiché $U = \mathrm{Span}(v)^{\perp}$) ed $f_U \in \mathrm{End}(U)$ è autoaggiunto rispetto a $g_{|U}$. Per ipotesi induttiva esiste una base di U, $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, ortonormale per il prodotto scalare $g_{|U}$ che diagonalizza f_U. Il teorema segue ora definendo $v_n := \frac{v}{\|v\|}$ e $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$. $\square$

Corollario 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale $C \in \mathrm{O}(n)$ tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è diagonale. In particolare A è diagonalizzabile. Inoltre, siccome $C^{-1} = {}^tC$, A è congruente ad una matrice diagonale.*

Dim. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che $\mathcal{B}$ è ortonormale per il prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Siccome $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$, L_A è autoaggiunto (Proposizione 1). Per il teorema spettrale esiste una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$, ortonormale per $\langle , \rangle$, che diagonalizza L_A, cioè tale che $(\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}))^{-1} \cdot A \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ è diagonale. Poiché le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono ortonormali, $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \in \mathrm{O}(n)$ (Proposizione 12, Capitolo 9). Il risultato segue ponendo $C = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. $\square$

Come annunciato nel Capitolo 9, Osservazione 4.3., dal teorema spettrale segue che ogni forma bilineare simmetrica $g: V \times V \to \mathbb{R}$, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$, è diagonalizzabile (nel senso del seguente risultato).

Corollario 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Sia $g \in \mathrm{Bil}(V)$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ è diagonale.*

Dim. Sia $\mathcal{C}$ una base qualunque di V. Per la Proposizione 4 del Capitolo 9, $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)$ è una matrice simmetrica. Per il precedente corollario, $\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) \equiv D$, dove D è una matrice diagonale. Il risultato segue ora dall'Osservazione 4.2. del Capitolo 9. $\square$

Vediamo ora un procedimento per trovare, dato un endomorfismo autoaggiunto $f \in \mathrm{End}(V)$ (o una matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$), una base ortonormale di (V, g) che diagonalizza f (rispettivamente A). Riportiamo prima un risultato che sarà utile a tale proposito.

Proposizione 2. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ autoaggiunto rispetto a g. Se $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(f)$ sono due autovalori distinti allora gli autospazi corrispondenti V_λ e V_μ sono ortogonali tra di loro.*

Dim. Per ogni $v \in V_\lambda$ e per ogni $w \in V_\mu$ valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lambda g(v, w) = g(f(v), w) = g(v, f(w)) = \mu g(v, w) .$$

Siccome $\lambda \neq \mu$ segue che $g(v,w)=0$. $\square$

Sia (V,g) uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita n. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo autoaggiunto rispetto a g. Per trovare una base ortonormale di (V,g) che diagonalizza f procediamo come segue.

1. Scegliamo una base ortonormale $\mathcal{C}$ di V e determiniamo la matrice $A := \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) \in \mathrm{M}_n(f)$. Per la Proposizione 1 A è simmetrica.

2. Determiniamo il polinomio caratteristico di f, $P_f(t) = \det(A - t\mathrm{I}_n) \in \mathbb{R}[t]$, e le sue radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Per il Lemma 1 vale la seguente uguaglianza:
$$P_f(t) = (\lambda_1 - t)^{\mathrm{m_a}(\lambda_1)} \cdot (\lambda_2 - t)^{\mathrm{m_a}(\lambda_2)} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - t)^{\mathrm{m_a}(\lambda_k)}\,,$$
dove $\mathrm{m_a}(\lambda_i)$ è la molteplicità algebrica di λ_i, $\forall i = 1, \dots, k$.

3. Per ogni $i = 1, \dots, k$, si determina una base $\{w_{i,1}, \dots, w_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i}, dove $\mathrm{m_g}(\lambda_i)$ è la molteplicità geometrica di λ_i. Osserviamo che $\mathrm{m_g}(\lambda_i) = \mathrm{m_a}(\lambda_i)$ perchè f è diagonalizzabile. Ricordiamo che per determinare $\{w_{i,1}, \dots, w_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}\}$ è sufficiente risolvere il sistema lineare omogeneo
$$(A - \lambda_i \mathrm{I}_n) \cdot x = 0\,,$$
poiché $V_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}_V)$.

4. Per ogni $i = 1, \dots, k$, applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $w_{i,1}, \dots, w_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}$ e troviamo una base $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,\mathrm{m_g}(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i} ortonormale rispetto al prodotto scalare g.

5. $\mathcal{B} := \{v_{1,1}, \dots, v_{k,\mathrm{m_g}(\lambda_k)}\}$ è una base ortonormale di (V,g) che diagonalizza f. Osserviamo che, $\forall i \neq j$, i vettori $v_{i,\ell}$ ed $v_{j,m}$ sono ortogonali per la Proposizione 2.

Esempio 1. 1. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Allora $P_A(t) = t^2 - 15t + 50 = (t-10)(t-5)$.

$$V_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Quindi una base ortonormale per $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ che diagonalizza A è $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La matrice del cambiamento di base (da $\mathcal{B}$ alla base canonica) è
$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)\,.$$

Infine valgono le seguenti uguaglianze:

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = {}^tC \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Allora $P_A(t) = (2-t)(t^2 - 4t + 3) + t - 3 + t - 3 = (2-t)(t-1)(t-3) + 2(t-3) = (t-3)(-t^2 + 3t - 2 + 2) = -t(t-3)^2$. Quindi lo spettro di A è $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$, $\mathrm{m_a}(0) = \mathrm{m_g}(0) = 1$, $\mathrm{m_a}(3) = \mathrm{m_g}(3) = 2$.

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) .$$

Per mezzo del procedimento di Gram-Schmidt otteniamo le seguenti basi ortonormali di V_0 e V_3. Per V_0 abbiamo: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per V_3: $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

quindi $v_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale che diagonalizza A è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. La matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è dunque

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3) .$$

Si osservi che

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = {}^tC \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$