

Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: Il Teorema Spettrale

- 1.** Sia $(V, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo autoaggiunto e nilpotente. Si dimostri che $f = 0$.
- 2.** Per ognuna delle seguente matrici A si determini una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tale che $B^{-1}AB = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 3.** Sia $(V, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita. Siano $f, g: V \rightarrow V$ endomorfismi autoaggiunti. Si dimostri che $f \circ g$ è autoaggiunto $\Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$.
- 4.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Si dimostri che l'endomorfismo $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.
- (b) Si determinino una matrice ortogonale $B \in O(3)$ ed una matrice diagonale D , tali che $B^{-1}AB = D$.
- 5.** In $\mathbb{R}^3$ si consideri la seguente forma bilineare:

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g({}^t(x_1, x_2, x_3), {}^t(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3.$$

- (a) Sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}(g)$ che rappresenta g rispetto a $\mathcal{B}$.
- (b) Si determini una matrice ortogonale $C \in O(3)$ tale che ${}^tC \cdot A \cdot C$ sia diagonale, dove $A = M_{\mathcal{B}}(g)$ del punto (a).
- (c) Si dica se g è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$, cioè se è simmetrica e definita positiva.

6. Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x + z \\ y \end{pmatrix}.$$

Si dica se f è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare canonico (ovvero standard) di $\mathbb{R}^3$. Nel caso affermativo si determinino una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f e la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$.

7. Sia $g \in \text{Bil}(\mathbb{R}^3)$ la forma bilineare, tale che

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

- (a) Si determini una base ortonormale $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare standard, tale che $M_{\mathcal{C}}(g)$ sia diagonale.
- (b) Si dica se g è un prodotto scalare.