**Corso di GEOMETRIA**
**Dipartimento di Ingegneria ed Architettura**
**Università degli Studi di Trieste**
Prof. Fabio Perroni

# 11. Coniche

In questo capitolo vedremo alcuni risultati sulla geometria delle coniche affini reali e delle coniche Euclidee. Per maggiori dettagli e per le dimostrazioni degli enunciati che riporteremo, rimandiamo il lettore al libro di Sernesi, "Geometria 1", Bollati Boringhieri.

Denotiamo con $\mathbb{R}[x, y]$ l'anello dei polinomi nelle variabili $x, y$ a coefficienti reali. Due polinomi $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ sono **proporzionali**, se esiste una costante non nulla $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $Q(x, y) = \lambda P(x, y)$. Osserviamo che la proporzionalità è una relazione di equivalenza in $\mathbb{R}[x, y]$, e che polinomi equivalenti hanno lo stesso grado. Questo ci permette di definire il **grado** di una classe di proporzionalità come il grado di un suo rappresentante.

**Definizione 1.** *Una **conica** $\mathcal{C}$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è una classe di proporzionalità di grado 2 in $\mathbb{R}[x, y]$.*

*Se $P(x, y)$ è un rappresentante della classe $\mathcal{C}$, allora $P(x, y)$ è della forma seguente:*

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}\,, \tag{1}$$

*dove gli $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ed $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ non sono tutti nulli.*

*L'equazione*

$$P(x, y) = 0 \tag{2}$$

*si dice **equazione della conica** $\mathcal{C}$.*

*Il **supporto della conica** $\mathcal{C}$ è l'insieme dei punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ che soddisfano l'equazione (2), dove $P(x, y)$ è un rappresentante di $\mathcal{C}$.*

**Osservazione 1. 1.** Osserviamo che il supporto di una conica $\mathcal{C}$ non dipende dal rappresentante $P(x, y)$ scelto.

**2.** Nella Definizione 1 abbiamo implicitamente descritto i punti di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ per mezzo delle loro coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento canonico (si veda il Capitolo 7, Esempio 3.3.). Ci si può pertanto chiedere se, cambiando il riferimento affine, l'espressione (1) (e quindi l'equazione (2)) assume un'altra forma. Vedremo ora che questo non è il caso.

Al fine si semplificare la notazione scriviamo il polinomio $P(x,y)$ in (1) in forma matriciale, come segue. Siano $a_{10} := a_{01}, a_{20} := a_{02}$ ed $a_{21} := a_{12}$, e consideriamo la matrice $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq 2}$. Allora

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

(la verifica è lasciata per esercizio).

Supponiamo ora di scegliere un'altro riferimento affine per $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, ed indichiamo con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le coordinate rispetto al nuovo riferimento (Definizione 3, Capitolo 7). Dai risultati della sezione 3.2 del Capitolo 8, la formula che esprime il passaggio da un sistema di coordinate all'altro è la seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} , \quad \text{con} \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) , \tag{4}$$

e di conseguenza

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \tilde{\mathrm{M}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} , \tag{5}$$

dove $\tilde{\mathrm{M}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. Osserviamo che $\tilde{\mathrm{M}} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Ora, sostituendo nella (3) le coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con le $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ per mezzo della (5), si ottiene la seguente espressione:

$$P'(x',y') := \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \cdot {}^t\tilde{\mathrm{M}} \cdot A \cdot \tilde{\mathrm{M}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Sia $A' = {}^t\tilde{\mathrm{M}} \cdot A \cdot \tilde{\mathrm{M}} = (a'_{ij})_{0\leq i,j\leq 2}$. Osserviamo che $A' \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ è simmetrica, inoltre, se indichiamo con $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ed analogamente $A'_0 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$, allora $A'_0 = {}^tM \cdot A_0 \cdot M$, quindi $A'_0 \neq 0$ (poiché $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). Da questo segue che $P'(x',y') \in \mathbb{R}[x',y']$ è un polinomio di grado 2 della stessa forma di $P(x,y)$.

**Esempio 1. 1.** Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $P(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Osserviamo che $P(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1$ (in particolare il supporto di $\mathcal{C}$ coincide con la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 1). Il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

trasforma $\mathcal{C}$ nella conica $\mathcal{C}'$ di equazione $P'(x',y') = x'^2 + y'^2 - 1$. Osserviamo che l'equazione (7) corrisponde ad una traslazione $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ed infatti il supporto di $\mathcal{C}'$ è la circonferenza di centro l'origine (del nuovo riferimento affine) e raggio 1.

**2.** Consideriamo ora la stessa conica $\mathcal{C}$ dell'esempio precedente e le nuove coordinate $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$, tali che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'' \\ 3y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Allora $P''(x'',y'') = 4x''^2 + 9y''^2 - 1$, quindi il supporto di $\mathcal{C}''$ è un'ellisse. Quindi, cambiando le coordinate affini è possibile trasformare una circonferenza in una ellisse.

Dunque, abbiamo visto che, se $\mathcal{C}$ è una conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, un cambio di coordinate (4) trasforma $\mathcal{C}$ in una conica $\mathcal{C}'$. Inoltre, due rappresentanti $P(x,y)$ di $\mathcal{C}$ e $P'(x',y')$ di $\mathcal{C}'$ sono legati dalla formula (6), a meno di un fattore moltiplicativo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che, geometricamente, $\mathcal{C}'$ è la stessa conica $\mathcal{C}$, descritta rispetto ad un'altro sistema di coordinate. Questo motiva la seguente definizione.

**Definizione 2.** *Due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si dicono **affinemente equivalenti**, se esiste una trasformazione di coordinate affini* (4) *che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$. In tal caso scriveremo $\mathcal{C} \cong_A \mathcal{C}'$.*

Possiamo riassumere ora le considerazioni fatte sopra nella seguente proposizione.

**Proposizione 1.** *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Sia $P(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x,y]$ un rappresentante di $\mathcal{C}$, e sia $Q(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x,y]$ un rappresentante di $\mathcal{C}'$, dove $A, B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono matrici simmetriche. Allora, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono affinemente equivalenti, se e solo se esiste una matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, un vettore $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ed una costante non nulla $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tale che*

$$\lambda B = {}^t\tilde{\mathrm{M}} \cdot A \cdot \tilde{\mathrm{M}} ,$$

*dove* $\tilde{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

**Osservazione 2. 1.** Osserviamo che l'essere affinemente equivalenti è una relazione di equivalenza tra le coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. La proprietà riflessiva è chiara.

La proprietà simmetrica segue dalla seguente uguaglianza, utilizzando la Proposizione 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{M})} \begin{pmatrix} \det(\mathrm{M}) & 0 & 0 \\ -c_1 m_{22} + c_2 m_{12} & m_{22} & -m_{12} \\ c_1 m_{21} - c_2 m_{11} & -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Analogamente, la proprietà transitiva segue dalla seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1' & m_{11}' & m_{12}' \\ c_2' & m_{21}' & m_{22}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 + m_{11}c_1' + m_{12}c_2' & m_{11}m_{11}' + m_{12}m_{21}' & m_{11}m_{12}' + m_{12}m_{22}' \\ c_2 + m_{21}c_1' + m_{22}c_2' & m_{21}m_{11}' + m_{22}m_{21}' & m_{21}m_{12}' + m_{22}m_{22}' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

**2.** Possiamo interpretare il cambio di coordinate (4) come una trasformazione del piano affine:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \\ &\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Tali trasformazioni si chiamano **trasformazioni affini**, o anche **affinità**. Osserviamo innanzitutto che una affinità $\mathrm{T}\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è una funzione biettiva. Inoltre, l'identità $\mathrm{Id}_{\mathbb{A}^2(\mathbb{R})}$ è una affinità, e dalle uguaglianze (8) e (9) segue che $\mathrm{T}^{-1}$ e $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}'$ sono affinità, per ogni affinità $\mathrm{T}, \mathrm{T}'$. Infatti la (8) è equivalente alla seguente formula

$$\mathrm{T}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathrm{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

e la (9) alla seguente:

$$(\mathrm{T} \circ \mathrm{T}')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{M}' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

**Definizione 3.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Il **rango** di $\mathcal{C}$ si definisce come $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) := \mathrm{rg}(A)$, dove $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica tale che $P(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x, y]$ è un rappresentante di $\mathcal{C}$.*

Come conseguenza immediata della Proposizione 1 abbiamo il seguente corollario.

**Corollario 1.** *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono affinemente equivalenti, $\mathcal{C} \cong_A \mathcal{C}'$, allora $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \mathrm{rg}(\mathcal{C}')$.*

**Definizione 4.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{C}$ è detta:*

- ***non degenere*** *se* $\operatorname{rg}(\mathcal{C}) = 3$*;*
- ***degenere*** *se* $\operatorname{rg}(\mathcal{C}) < 3$*;*
- ***semplicemente degenere*** *se* $\operatorname{rg}(\mathcal{C}) = 2$*;*
- ***doppiamente degenere*** *se* $\operatorname{rg}(\mathcal{C}) = 1$*.*

**Proposizione 2.** *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Sia $P(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x,y]$ un rappresentante di $\mathcal{C}$, e sia $Q(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x,y]$ un rappresentante di $\mathcal{C}'$, dove $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 2}, B = (b_{ij})_{0 \leq i,j \leq 2} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono matrici simmetriche. Siano*

$$A_0 := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , \quad B_0 := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} .$$

*Se $\mathcal{C} \cong_A \mathcal{C}'$, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\operatorname{rg}(A_0) = \operatorname{rg}(B_0)$*;*
2. *se $\det(A_0) \neq 0$, allora $\det(A_0)$ e $\det(B_0)$ hanno lo stesso segno, in altre parole $\frac{\det(A_0)}{|\det(A_0)|} = \frac{\det(B_0)}{|\det(B_0)|}$, dove $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda|$ è il valore assoluto di $\lambda$.*

**Definizione 5.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{C}$ è detta:*

- ***a centro****, se* $\det(A_0) \neq 0$*;*
- ***parabola****, se* $\det(A_0) = 0$*.*

*Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, allora $\mathcal{C}$ è:*

- *una* ***ellisse****, se* $\det(A_0) > 0$*;*
- *una* ***iperbole****, se* $\det(A_0) < 0$*.*

**Teorema 1** (Classificazione delle coniche affini)**.** *Ogni conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è affinemente equivalente ad una delle seguenti coniche:*

1. $x^2 + y^2 - 1$ *(ellisse);*
2. $x^2 + y^2 + 1$ *(ellisse a punti non reali);*
3. $x^2 + y^2$ *(ellisse degenere);*
4. $x^2 - y^2 - 1$ *(iperbole);*
5. $x^2 - y^2$ *(iperbole degenere);*

6. $y^2 - x$ *(parabola);*

7. $y^2 - 1$ *(parabola degenere);*

8. $y^2 + 1$ *(parabola degenere a punti non reali);*

9. $y^2$ *(conica doppiamente degenere).*

*Le coniche della lista 1.–9. sono a due a due non affinemente equivalenti.*

**Esempio 2. 1.** Consideriamo la conica $\mathcal{C} : x^2 + 3xy - y + 1$. Allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $\det(A) = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = 3$ e perciò $\mathcal{C}$ è non degenere. Inoltre $\det(A_0) = -\frac{9}{4} < 0$, quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere. Dal precedente teorema segue che:

$$\mathcal{C} \cong_A x^2 - y^2 - 1 .$$

Per trovare il cambiamento di coordinate che trasforma $\mathcal{C}$ in $x^2-y^2-1$ procediamo come segue.
<u>1. Eliminazione del termine $2a_{12}xy$.</u> Siccome $A_0$ è simmetrica, esiste $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ <u>tale che ${}^t\mathrm{M} \cdot A_0 \cdot \mathrm{M}$ è diagonale.</u>

Nel nostro esempio:

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy - y + 1 &= (x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2) - \frac{9}{4}y^2 - y + 1 \\ &= (x + \frac{3}{2}y)^2 - \frac{9}{4}y^2 - y + 1 \\ &= x'^2 - \frac{9}{4}y'^2 - y' + 1 := \mathcal{C}' , \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $x' = x + \frac{3}{2}y$, $y' = y$.
<u>2. Se $\mathcal{C}'$ (e quindi $\mathcal{C}$) è a centro, eliminazione dei termini di primo grado.</u> Se $\mathcal{C}'$ è <u>a centro, in seguito al passo 1. abbiamo che $a_{12} = 0$, quindi $a_{11}a_{22} \neq 0$.</u> Possiamo dunque effettuare il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x'' &= x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y'' &= y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$$

In tal modo si eliminano i coefficienti $a_{01}, a_{02}$.

Nel nostro esempio abbiamo:

$$\begin{aligned} x'^2 - \frac{9}{4}y'^2 - y' + 1 &= x'^2 - ((\frac{3}{2}y')^2 + y') + 1 \\ &= x'^2 - (\frac{3}{2}y' + \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{9} + 1 \\ &= x''^2 - y''^2 + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

dove $x'' = x'$, $y'' = \frac{3}{2}y' + \frac{1}{3}$.
<u>3. Normalizzazione dei coefficineti.</u> Ora dividiamo il polinomio per $-\frac{10}{9}$ ed otteniamo un polinomio proporzionale a:

$$\left(\frac{y''}{\sqrt{\frac{10}{9}}}\right)^2 - \left(\frac{x''}{\sqrt{\frac{10}{9}}}\right)^2 - 1\,.$$

Quindi basta porre $x''' = \frac{y''}{\sqrt{\frac{10}{9}}}$ ed $y''' = \frac{x''}{\sqrt{\frac{10}{9}}}$.

**2.** <u>Caso di conica non a centro.</u> Una volta eliminato il coefficiente $a_{12}$, a meno di scambiare le variabili $x' \leftrightarrow y'$, possiamo supporre che $a_{11} = 0$ ed $a_{22} \neq 0$. Quindi $\mathcal{C}'$ è rappresentata dal seguente polinomio:

$$\begin{aligned} a_{22}y'^2 + 2a_{01}x' + 2a_{02}y' + a_{00} &= a_{22}\left(y'^2 + 2\frac{a_{02}}{a_{22}}y'\right) + 2a_{01}x' + a_{00} \\ &= a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' + a_{00} - \left(\frac{a_{02}}{a_{22}}\right)^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $y'' = y' + \frac{a_{02}}{a_{22}}$, $x'' = x'$. Sia $b_{00} := a_{00} - \left(\frac{a_{02}}{a_{22}}\right)^2$, quindi

$$\mathcal{C}' \cong_A \mathcal{C}'' = a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' + b_{00}\,.$$

Se $a_{01} = 0$, allora basta normalizzare i coefficienti per ottenere un polinomio come nella lista del Teorema 1 (in questo caso abbiamo una parabola degenere o una conica doppiamente degenere). Altrimenti osserviamo che:

$$a_{22}y''^2 + 2a_{01}x'' + b_{00} = a_{22}y''^2 + 2a_{01}\left(x'' + \frac{b_{00}}{2a_{01}}\right),$$

quindi ponendo $y''' := y''$, $x''' := x'' + \frac{b_{00}}{2a_{01}}$ ed eventualmente normalizzando i coefficienti si ottiene l'equazione 6 del Teorema 1.

**Osservazione 3.** Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro, allora essa possiede un centro di simmetria (da cui ne deriva il suo nome). Infatti, se

$$P(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}$$

è un rappresentante di $\mathcal{C}$, per definizione la matrice $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ha rango 2, quindi esiste un'unica soluzione $C_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ del sistema lineare $A_0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{10} \\ -a_{20} \end{pmatrix}$. Il punto $C_0 \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è il centro di simmetria di $\mathcal{C}$, infatti il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

lascia il polinomio $P(x,y)$ invariato.

# 1 Coniche Euclidee

Consideriamo il piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sullo spazio vettoriale Euclideo $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare standard. In questo modo otteniamo lo spazio Euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. In questo contesto, per conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ si intende una conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (Definizione 1).

**Definizione 6.** *Due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ si dicono **isometriche**, se esiste un cambio di coordinate della forma*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} ,$$

*con $\mathrm{M} \in \mathrm{O}(2)$ matrice ortogonale, che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$. In tal caso scriveremo $\mathcal{C} \cong_E \mathcal{C}'$.*

**Osservazione 4.** L'isometria è una relazione di equivalenza tra le coniche di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$.

Vale il seguente teorema.

**Teorema 2** (Classificazione Euclidea delle coniche)**.** *Ogni conica di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ è isometrica ad una ed una sola delle seguenti coniche.*

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, *con* $a \geq b > 0$ *(Ellisse).*
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1$, *con* $a \geq b > 0$ *(Ellisse a punti non reali).*
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, *con* $a \geq b > 0$ *(Ellisse degenere).*
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$, *con* $a > 0, b > 0$ *(Iperbole).*
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, *con* $a \geq b > 0$ *(Iperbole degenere).*
6. $y^2 - 2px$, *con* $p > 0$ *(Parabola).*
7. $y^2 - a^2$, *con* $a > 0$ *(Parabola degenere).*
8. $y^2 + a^2$, *con* $a > 0$ *(Parabola degenere a punti non reali).*
9. $y^2$ *(Conica doppiamente degenere).*