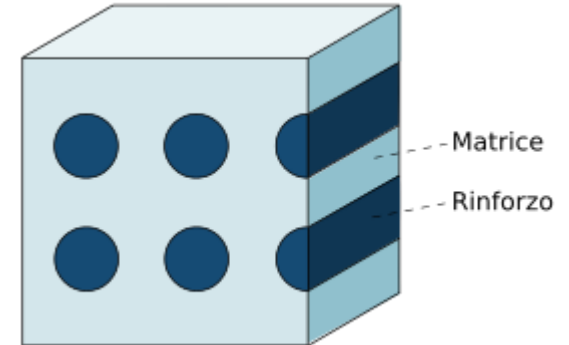




# Materiali compositi





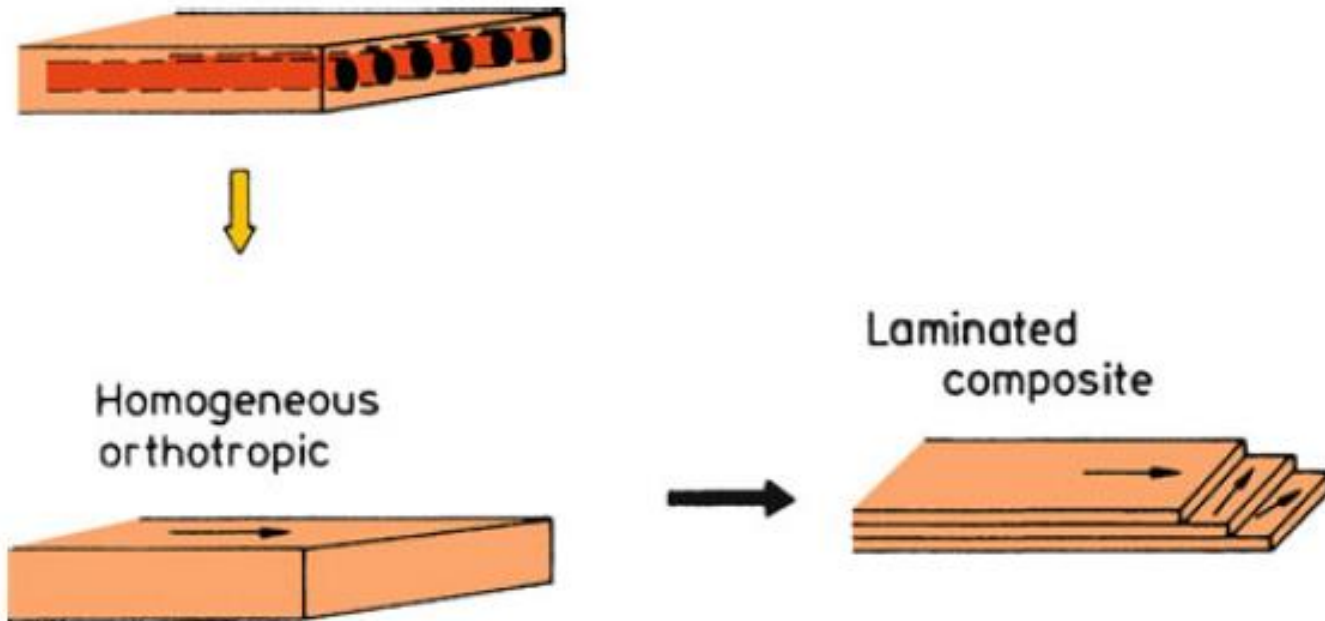
## Macromeccanica dei PMC

Un laminato in materiale composito viene realizzato mediante la sovrapposizione di diverse lamine, ciascuna con le fibre orientate in una determinata direzione, al fine di ottenere una struttura con le proprietà desiderate.

Cercheremo di utilizzare le informazioni derivanti dall'analisi micromeccanica come input per l'analisi di un laminato. In sostanza, una volta determinate per via sperimentale o utilizzando un modello teorico, le caratteristiche di una lamina, la tratteremo come un materiale omogeneo ortotropo.

Un laminato sarà dunque dato dalla sovrapposizione di un certo numero di lamine ortotrope orientate ciascuna in un determinato modo.

# Macromeccanica dei PMC



# Macromeccanica dei PMC

Ricordiamo che (notazione tensoriale):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (81 \text{ - rigidezza})$$

Tensore deformazioni (solo parte sym, no rotazione):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$



Tensore sforzi (sym per equil. alla rotazione):  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Per semplicità:

<i>ij or kl</i>	11	22	33	23	31	12
<i>m or n</i>	1	2	3	4	5	6

$$\sigma_m = C_{mn}\varepsilon_n \quad (36)$$

Simmetria maggiore (potenziale elastico):  $C_{mn} = C_{nm} \quad (21)$

# Macromeccanica dei PMC

Inversa:  $\varepsilon_m = S_{mn} \sigma_n$  (21 - cedevolezza)

Forma espansa:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Sforzi di taglio  
ingegneristici

# Macromeccanica dei PMC

Esempio: materiale isotropo (2 costanti indipendenti):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad G = \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(S_{11}-S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})},$$

$$S_{12} = -\frac{C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}$$

$E, G, \nu, K$

$$E = 2G(1 + \nu)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

# Macromeccanica dei PMC

Lamina materiale isotropo in stato di stress piano ( $\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0$ ), come ad esempio una lamiera di alluminio:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

No deformazioni fuori dal piano.

# Macromeccanica dei PMC

Nel nostro caso, abbiamo però un materiale ortotropo, il cui comportamento è un po' più complesso. Se gli assi coordinati sono paralleli agli assi di simmetria naturale del materiale:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$$

Per C, si può scrivere un'espressione simile.



# Macromeccanica dei PMC

In condizioni di stress piano, con gli assi naturali e geometrici coincidenti:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ & & S_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

(ortotropia bidimensionale)

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2},$$
$$Q_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2},$$
$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2},$$
$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}.$$

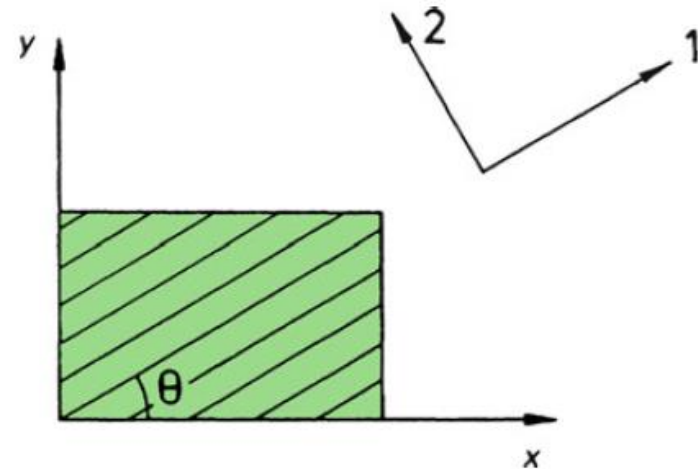
4 costanti

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

# Macromeccanica dei PMC

Per un'orientazione degli assi geometrici non coincidente con quella degli assi naturali, le matrici diventano completamente popolate:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{bmatrix}$$



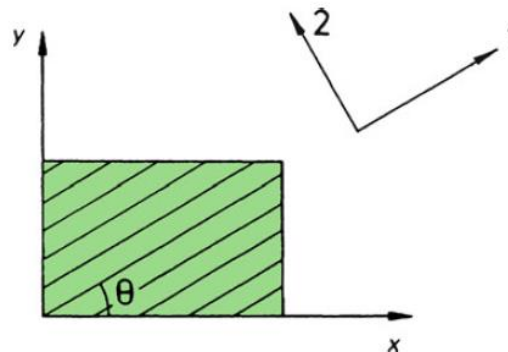
Note le proprietà nel sistema 1-2, cerchiamo di determinare quelle nel sistema x-y.

# Macromeccanica dei PMC

Coseni direttori:

Direction	$x$	$y$	
1	$a_{11} = m$	$a_{12} = n$	$m = \cos \theta$
2	$a_{21} = -n$	$a_{22} = m$	$n = \sin \theta$

Angolo  $\theta$  positivo quando  $x$ - $y$  è ruotato in senso antiorario rispetto 1-2.



# Macromeccanica dei PMC

Trasformazioni:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = [T]_\sigma \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = [T]_\varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{bmatrix}$$

$$[T]_\sigma = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

Le due matrici di trasformazione sono diverse perché così si evita di dover mettere il coefficiente  $\frac{1}{2}$  davanti alle componenti ingegneristiche di taglio per convertirle nella forma tensoriale (effettivamente trasformabili).

## Macromeccanica dei PMC

Se moltiplico la  $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = [T]_{\sigma} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix}$  per  $[T]_{\sigma}^{-1}$ , ottengo (ricordo che  $[T]_{\sigma}[T]_{\sigma}^{-1} = [I]$ ):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} = [T]_{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

La matrice inversa è ( $\theta \rightarrow -\theta$ ):

$$[T]_{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} = [T]_{\sigma}^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$



# Macromeccanica dei PMC

Sostituendo ulteriormente, arriviamo a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} = [T]_{\sigma}^{-1} [Q] [T]_{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{bmatrix}$$

Ovvero, per una lamina ortotropa orientata arbitrariamente:

$$[\bar{Q}] = [T]_{\sigma}^{-1} [Q] [T]_{\varepsilon}$$

$$m = \cos \theta$$

$$n = \sin \theta$$

Ed esplicitamente:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4)$$



## Macromeccanica dei PMC

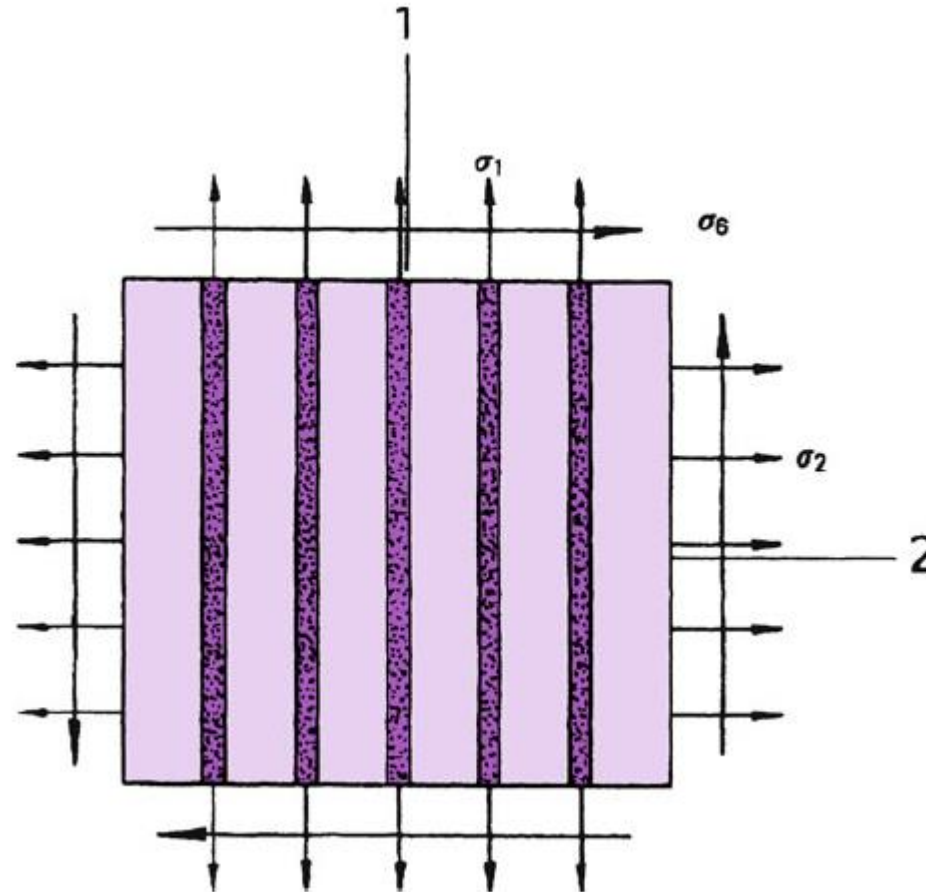
- Anche se la matrice  $[\bar{Q}]$  è «piena», solo 4 componenti sono indipendenti.
- Si può ricavare un'analogia relazione per la matrice  $[S]$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix}$$

Pertanto, uno stress normale  $\sigma_x$ , produrrà anche deformazione a taglio. Solo nel caso dell'orientazione «speciale» discussa in precedenza, ad uno stress normale corrisponderanno solo deformazioni normali.

# Macromeccanica dei PMC

Relazioni con le costanti ingegneristiche: consideriamo la lamina in figura.





# Macromeccanica dei PMC

Un set di costanti ingegneristiche utilizzabile in questo caso è il seguente:

$$E_1, E_2, G_6, \nu_{12} (= -\varepsilon_2/\varepsilon_1)$$

Supponiamo che solo  $\sigma_1$  sia diverso da 0.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{Q_{22}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{Q_{12}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2} \sigma_1 \end{aligned}$$

Per definizione  $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_1$ , per cui:

$$E_1 = \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}{Q_{22}}$$



## Macromeccanica dei PMC

Inoltre:

$$v_1 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{Q_{12}}{Q_{22}}$$

Ripetendo con  $\sigma_2$  come unica componente non nulla, si ottiene analogamente:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}{Q_{11}} \qquad v_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{Q_{12}}{Q_{11}}$$

Ponendo invece solo  $\sigma_6$  diversa da zero:

$$G_6 = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_6} = Q_{66}$$



## Macromeccanica dei PMC

Ovviamente non tutte e cinque le relazioni sono indipendenti, infatti:

$$v_1 E_2 = v_2 E_1 \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Si possono ottenere facilmente anche le relazioni inverse:

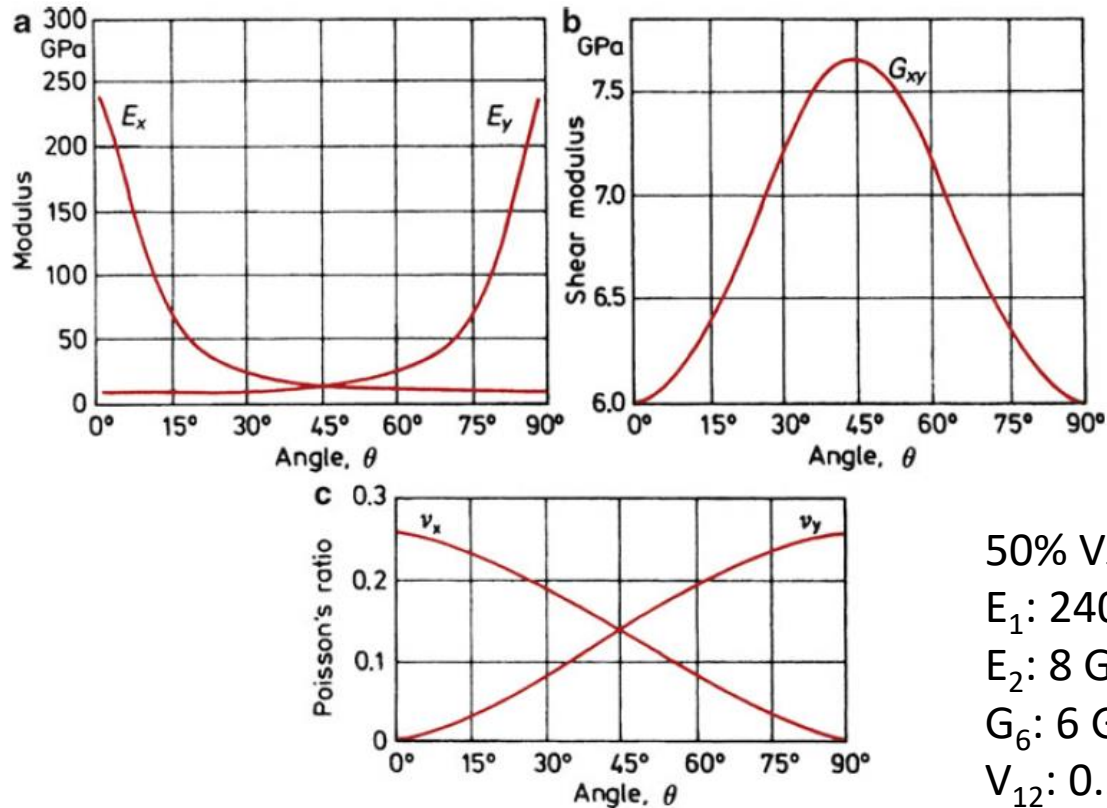
$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_1 v_2} \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_1 v_2} \qquad Q_{12} = \frac{v_1 E_2}{1 - v_1 v_2} = \frac{v_2 E_1}{1 - v_1 v_2} \qquad Q_{66} = G_6$$

Si può verificare che per gli elementi della matrice di cedevolezza valgono le seguenti espressioni:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \qquad S_{22} = \frac{1}{E_2} \qquad S_{12} = -\frac{v_1}{E_1} = -\frac{v_2}{E_2} \qquad S_{66} = \frac{1}{G_6}$$

# Macromeccanica dei PMC

E' possibile determinare la variazione della matrice [Q] con l'orientazione del sistema geometrico rispetto a quello naturale, quando essa è espressa in funzione delle grandezze ingegneristiche.



50%  $V_f$  C/epoxy  
 $E_1$ : 240 GPa  
 $E_2$ : 8 GPa  
 $G_6$ : 6 GPa  
 $V_{12}$ : 0.26

## Macromeccanica dei PMC

La procedura è semplice anche se un po' laboriosa. Si ottiene un set di espressioni molto utili:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{m^4}{E_1} + \frac{n^4}{E_2} + \left( \frac{1}{G_6} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) m^2 n^2$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{n^4}{E_1} + \frac{m^4}{E_2} + \left( \frac{1}{G_6} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) m^2 n^2$$

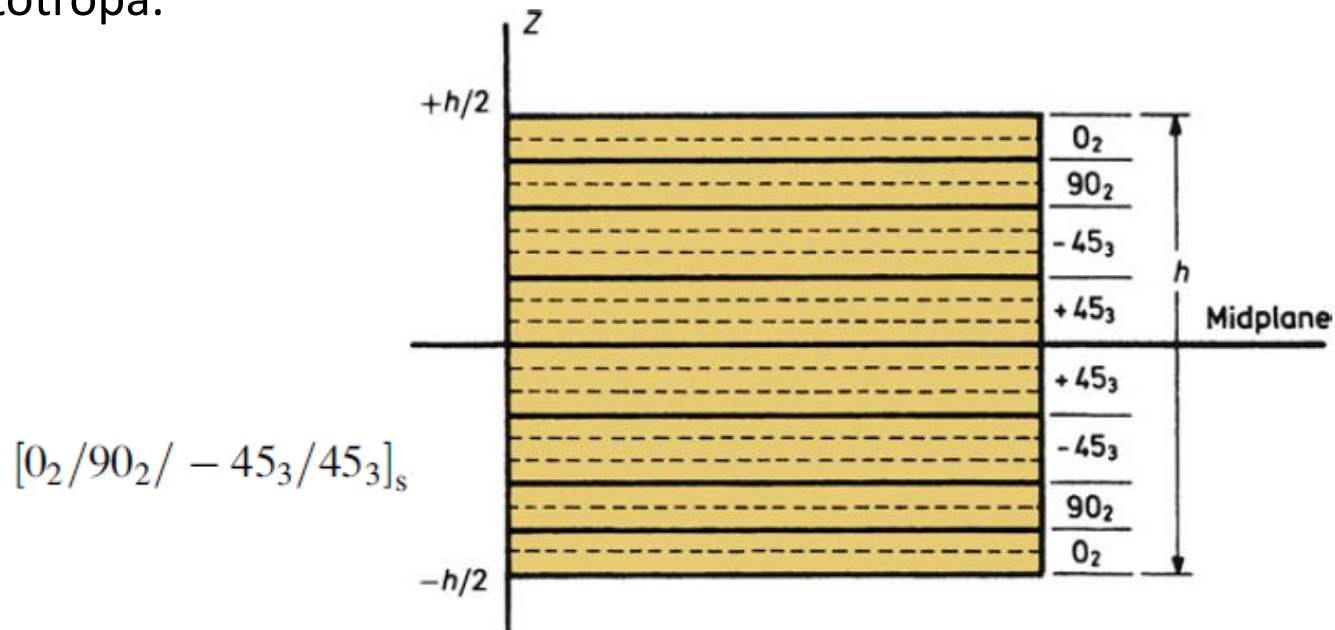
$$\nu_x = E_x \left[ \frac{\nu_1}{E_1} - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{2\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_6} \right) m^2 n^2 \right]$$

$$\nu_y = E_y \left[ \frac{\nu_2}{E_2} - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_1}{E_1} - \frac{1}{G_6} \right) m^2 n^2 \right]$$

$$\frac{1}{G_s} = \frac{1}{G_6} + 4m^2 n^2 \left( \frac{1 + \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2} - \frac{1}{G_6} \right)$$

# Macromeccanica dei PMC

Passiamo ora ad analizzare un laminato. Ogni lamina è considerata omogenea ed ortotropa.



La nomenclatura parte dal fondo del laminato ( $z=-h/2$ ) e tiene conto della presenza di un piano di simmetria (ma ovviamente non è obbligatorio). T= Total.

$$[0_2/90_2/-45_3/45_6/-45_3/90_2/0_2]_T$$





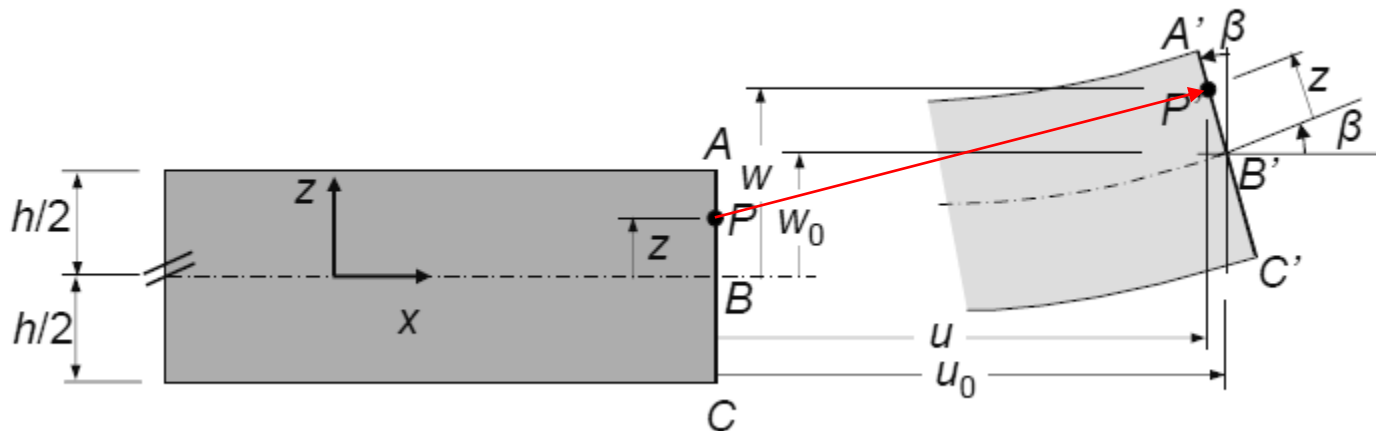
# Macromeccanica dei PMC

Assunzioni del modello classico dei laminati:

- aderenza perfetta tra le lamine.
- Comportamento elastico lineare delle lamine.
- Piccoli spostamenti, rotazioni e deformazioni.
- Spessore totale piccolo rispetto all'estensione nel piano.
- Modello cinematico di Kirchhoff: ogni segmento retto ortogonale al piano medio rimane: (i) rettilineo, (ii) ortogonale al piano e (iii) di lunghezza inalterata (questa ipotesi non ci consente di risalire alle deformazioni a taglio sullo spessore della piastra).

## Macromeccanica dei PMC

Vediamo cosa succede nel piano  $xz$  sulla base delle ipotesi assunte: cerchiamo lo spostamento  $\mathbf{u}=(u,v,w)$  di un punto  $P$  qualsiasi di coordinate  $(x,y,z)$ .



Il punto B subisce uno spostamento  $(u_0, v_0, w_0)$ . Il punto  $P'$  subirà dunque i seguenti spostamenti (notare che  $z$  non cambia per ipotesi):

$$u = u_0 - z \sin \beta$$

$$w = w_0 + z (\cos \beta - 1)$$





## Macromeccanica dei PMC

Poiché per ipotesi gli spostamenti e le deformazioni sono piccoli, si avrà:

$$\beta \cong \sin \beta \cong \tan \beta = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \cos \beta \cong 1$$

Pertanto, il campo di (piccoli) spostamenti sarà ( $v$  è analoga a  $u$ ):

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w = w_0 \quad \forall z \quad (\text{ovvero: la rotazione non ha effetto su } w)$$



## Macromeccanica dei PMC

Considerando il laminato giacente sul piano  $xy$ , il campo di spostamenti sarà dunque:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \\ v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \\ w_0(x,y) \end{array} \right\}$$

# Macromeccanica dei PMC

Le deformazioni si ricavano facilmente, avendole supposte infinitesime:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right] - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y},$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \right] = 0,$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \right] = 0,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z} = 0$$

Si tratta dunque di un campo di deformazioni piano.

# Macromeccanica dei PMC

Considerando il campo di deformazioni  $\varepsilon_0$  del piano medio ( $z=0$ ), si può allora scrivere:

$$[\varepsilon^0] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \triangle !$$

$$[K] = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \triangle !$$



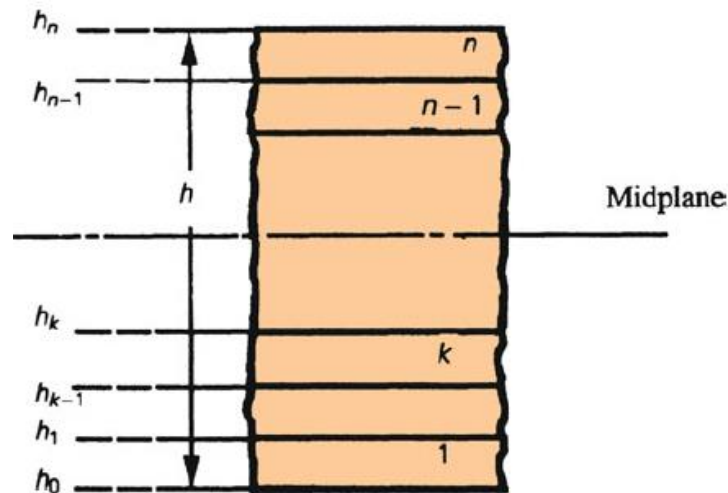
## Macromeccanica dei PMC

Si può dunque scrivere il tensore delle (piccole) deformazioni nella seguente forma, in notazione di Voigt:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon^0] + z[K] \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix}$$

# Macromeccanica dei PMC

Consideriamo ora un laminato, di spessore  $h$ , formato da  $n$  lamine sovrapposte.




Per la lamina  $k$ -esima (spessore  $h_k - h_{k-1}$ ), l'equazione costitutiva sarà, come visto in precedenza:

$$[\sigma]_k = [\bar{Q}]_k [\varepsilon]_k$$

## Macromeccanica dei PMC

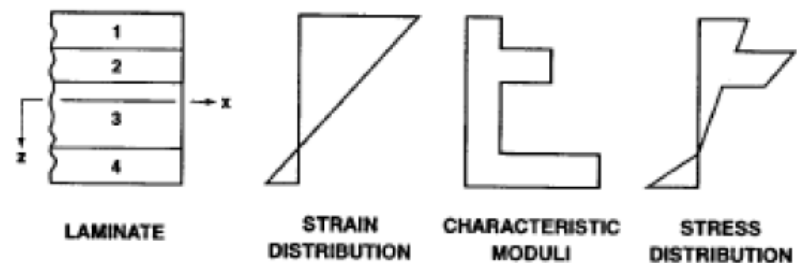
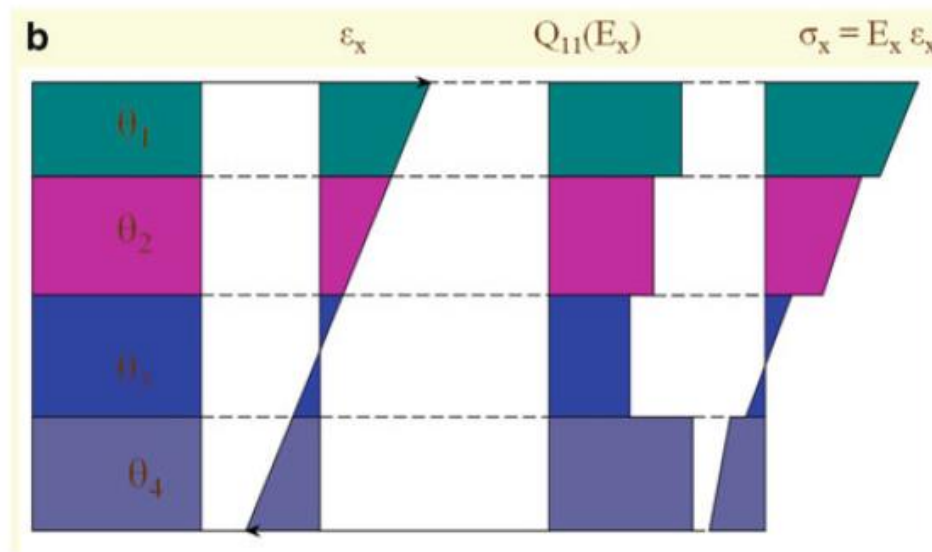
Sostituendo l'equazione rappresentativa del campo di deformazioni nella relazione costitutiva per la k-esima lamina:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon^0] + z[K]$$
$$[\sigma]_k = [\bar{Q}]_k [\varepsilon]_k$$

$$[\sigma]_k = [\bar{Q}]_k [\varepsilon^0] + z [\bar{Q}]_k [K]$$

Si osservi che, per le ipotesi formulate, lo strain varia linearmente con  $z$  in una lamina e quindi, per l'ipotesi di perfetta aderenza, nell'intero laminato. Per quanto riguarda lo stress, ciò non è vero.

# Macromeccanica dei PMC

Variazione di strain e stress in direzione x in un laminato formato da 4 lamine:







## Macromeccanica dei PMC

Il fatto che abbiamo ipotizzato un modello meccanico caratterizzato da uno stato di deformazione piana, non implica che siamo anche in uno stato di stress piano. Infatti, nell'ipotesi di deformazione piana, in un riferimento qualsiasi (indicato dagli apici), per un materiale qualunque:

$$\sigma'_i = C'_{1i}\varepsilon'_1 + C'_{2i}\varepsilon'_2 + C'_{6i}\varepsilon'_6, \quad i = 1, \dots, 6$$

Ciò vale anche per il caso in cui si consideri il materiale trasversalmente isotropo oppure, ovviamente, anche nel caso più generale di un materiale ortotropo:  $\sigma'_3$  sarà in generale diverso da zero (mentre, in questo caso,  $\sigma'_4$  e  $\sigma'_5$  saranno nulli, ma la situazione non cambia).

A rigore, quindi, non si possono utilizzare i risultati ottenuti per lo stato piano di tensione. Tuttavia, si ammette per ipotesi che ciò sia possibile, ovvero si suppone che  $\sigma'_3 = 0$ .



# Macromeccanica dei PMC

Possibili «giustificazioni»:

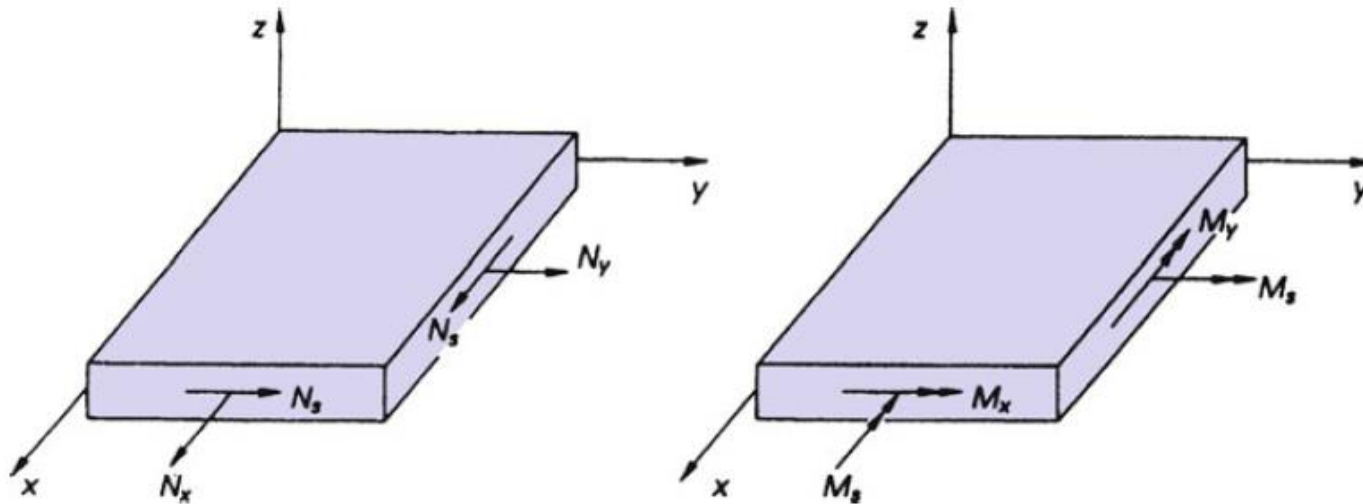
- $\sigma_3'$ , sulle superfici esterne della piastra è pari alle pressioni di contatto, generalmente inferiori di uno/due ordini di grandezza, per i carichi distribuiti ordinari, rispetto alle tensioni presenti nel piano.
- Essendo lo spessore piccolo, è ragionevole ammettere che il valore di  $\sigma_3'$  risulti limitato su tutto lo spessore. Si noti che, a rigore,  $\sigma_3'$  è discontinua all'interfaccia tra gli strati.

Osservazione: il fatto che, nelle ipotesi formulate le tensioni di taglio in direzione  $z$  siano nulle, implica che, in linea di principio, non è possibile l'equilibrio di un elemento di piastra sotto l'azione di carichi ortogonali al piano medio.

Esistono, per sanare tutti questi problemi, teorie di ordine superiore.

## Macromeccanica dei PMC

Dunque, ammettiamo di essere in condizioni di stress piano, oltre che di deformazione piana:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} = \sigma_s$



Definiamo quindi, per l'elemento rappresentato, le risultanti ed i momenti risultanti, così come rappresentati in figura.



## Macromeccanica dei PMC

Per tali risultanti «N» e momenti risultanti «M» sarà dunque rispettivamente:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$N_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s dz$$

$$M_{xy} = M_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s z dz$$

«N»: forza per unità di lunghezza del piano medio.

«M»: momento per unità di lunghezza del piano medio.

Il sistema delle tre risultanti «N» e dei tre momenti risultanti «M» è staticamente equivalente alla distribuzione degli stress lungo lo spessore del laminato.

## Macromeccanica dei PMC

Possiamo ottenere le risultanti integrando nello spessore di una lamina e sommando per le n lamine:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} dz \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix} z dz \right)
 \end{aligned}$$


$[\sigma]_k = [\bar{Q}]_k [\varepsilon^0] + z [\bar{Q}]_k [K]$


Ora,  $[\varepsilon^0]$  e  $[K]$  non sono funzioni di  $z$ , mentre  $[\bar{Q}]$  non è funzione di  $z$  una volta fissato il valore di  $k$ , cioè in una certa lamina.

## Macromeccanica dei PMC

Pertanto, l'espressione precedente può essere semplificata, portando fuori dall'integrale i termini costanti:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left( \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_x \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right)$$

 Spessore lamina

 Spessore lamina al quadrato

Ora, definiamo:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$



## Macromeccanica dei PMC

Siccome sappiamo calcolare le componenti di  $[Q]$  e quelle della matrice  $[\bar{Q}]$  in qualsiasi sistema di riferimento ruotato, come visto in precedenza, e siccome conosciamo gli spessori delle lamine, allora le matrici  $[A]$  e  $[B]$  sono ben definite.

Dunque, l'espressione per  $N$  può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix}$$

In forma compatta:

$$[N] = [A][\varepsilon^0] + [B][K]$$

# Macromeccanica dei PMC

In modo del tutto analogo, per i momenti  $M$ :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}$$

In forma compatta:

$$[M] = [B][\varepsilon^0] + [D][K]$$

Dove  $B$  è stata definita in precedenza e  $[D]$  è:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$



# Macromeccanica dei PMC

Le due relazioni, per N e M possono essere combinate ottenendo:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix}$$

Che è l'equazione costitutiva per il laminato cercata!

Per renderci conto della situazione, esaminiamo ad esempio l'espressione per  $N_x$ :

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\varepsilon_s^0 + B_{11}K_x + B_{12}K_y + B_{16}K_s$$

$N_x$  quindi dipende, in generale, da:

- Deformazioni a trazione del piano centrale  $\varepsilon_x^0$  ed  $\varepsilon_y^0$
- Deformazione piana a taglio del piano centrale  $\varepsilon_s^0$
- Curvature flessionali  $K_x$  e  $K_y$
- Curvatura di torsione  $K_s$



# Macromeccanica dei PMC

In un laminato, esistono quindi in generale, i seguenti accoppiamenti:

- trazione-taglio ( $A_{16}$ ,  $A_{26}$ )
- trazione-flessione
- trazione-torsione ( $B_{16}$ ,  $B_{26}$ )

I termini  $D_{16}$  e  $D_{26}$  rappresentano invece gli accoppiamenti flessione-torsione.

Nota 1:  $[A]$ , e  $[D]$  sono matrici simmetriche.

Nota 2: le unità di misura dei tre tensori sono differenti (quindi non sono direttamente confrontabili):

$[A]$ : N/m

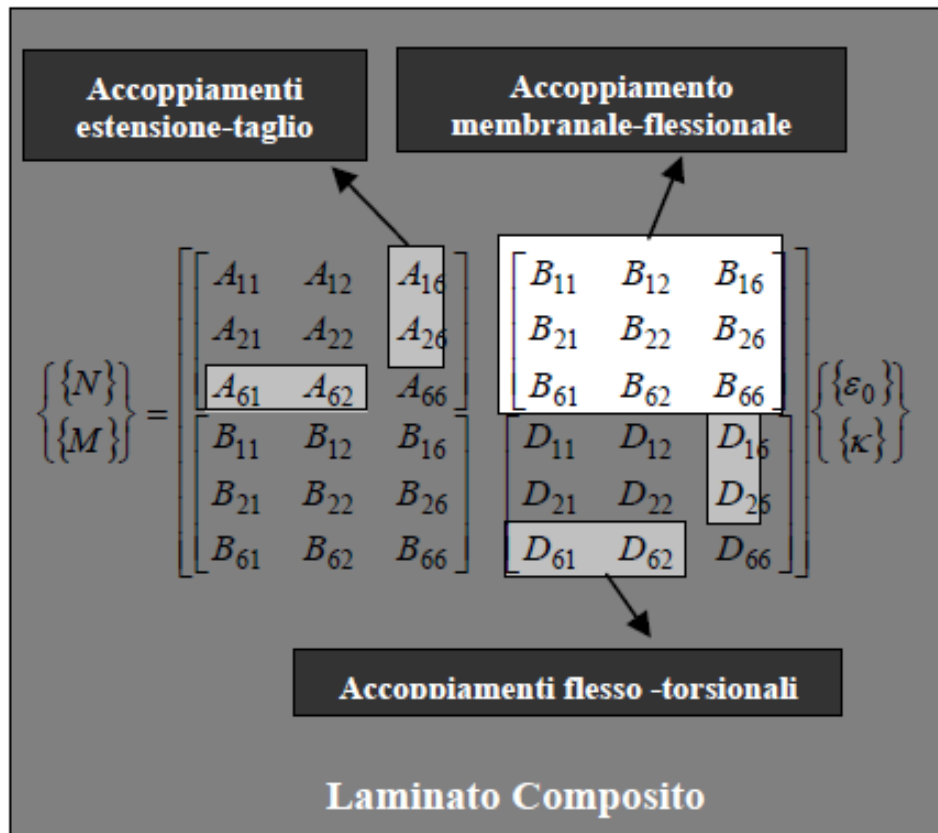
$[B]$ : N

$[D]$ : N\*m

La relazione indicata descrive il comportamento di un monostrato equivalente al laminato.

# Macromeccanica dei PMC

Graficamente:





# Macromeccanica dei PMC

Esistono delle situazioni, che possono essere determinate analizzando la relazione costitutiva ricavata, nelle quali alcuni di questi accoppiamenti scompaiono: caso dei laminati speciali.

## **No accoppiamenti trazione-taglio**

Se per ogni lamina  $+\theta$ , abbiamo un'altra lamina dello stesso spessore, ma  $-\theta$ , allora avremo quello che viene chiamato un laminato bilanciato. In questo caso  $A_{16} = A_{26} = 0$ . La posizione di tali strati nella sequenza di impilamento non ha importanza.

## **No accoppiamenti bending-stretching (laminati disaccoppiati : N dipende da $\varepsilon^0$ M da K)**

Se per ogni lamina sopra il piano medio abbiamo un'identica lamina (proprietà, orientazione e distanza dal piano medio) sotto il piano medio, allora ho un laminato simmetrico, per il quale  $[B]=0$ . Data l'assenza di accoppiamento bending-stretching, sono laminati che non danno distorsioni a causa di contrazioni termiche in-piano in fase di reticolazione.



## Macromeccanica dei PMC

Si noti che l'origine di  $[B]$  non risiede nelle proprietà delle lamine, ma nella mancanza di simmetria rispetto al piano medio: anche un laminato composto da due strati di materiali omogenei ed isotropi, come alluminio ed acciaio, ha una matrice  $[B]$  non nulla.

### **No accoppiamenti flessione-torsione**

Se per ogni lamina  $+\theta$  ad una certa distanza sopra il piano medio, abbiamo un'altra lamina dello stesso spessore e caratteristiche, ma  $-\theta$ , alla stessa distanza sotto il piano medio, allora avremo  $D_{16} = D_{26} = 0$ .

Si noti che:

- $D_{16} = D_{26} = 0$  anche per un laminato  $0^\circ/90^\circ$ . Ciò vale ovviamente anche per l'accoppiamento trazione-taglio.
- Un laminato di questo tipo NON può essere simmetrico, per cui  $[B] \neq 0$ , fatta eccezione per i laminati unidirezionali ( $0^\circ$  o  $90^\circ$ ) e per i laminati incrociati  $0^\circ/90^\circ$ .

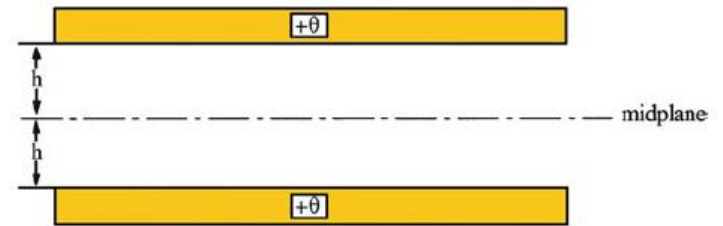


## Macromeccanica dei PMC

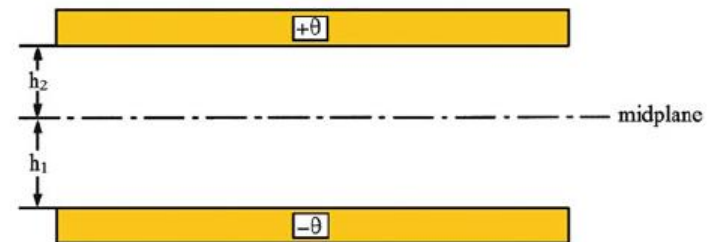
- Un laminato di questo tipo NON può essere simmetrico, per cui  $[B] \neq 0$ , fatta eccezione per i laminati unidirezionali ( $0^\circ$  o  $90^\circ$ ) e per i laminati incrociati  $0^\circ/90^\circ$ .
- Tuttavia, si può rendere  $D_{16}$  e  $D_{26}$  piccoli a piacere anche in un laminato simmetrico utilizzando un numero elevato di strati orientati a  $\pm\theta$ , in quanto la piccola differenza nelle distanze dal piano medio diventa trascurabile.

# Macromeccanica dei PMC

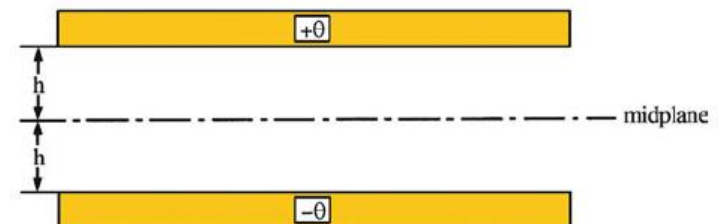
Riassumendo:



Symmetric Laminate  
 $[B] = [0]$



Balanced Laminate  
 $A_{16} = A_{26} = 0$

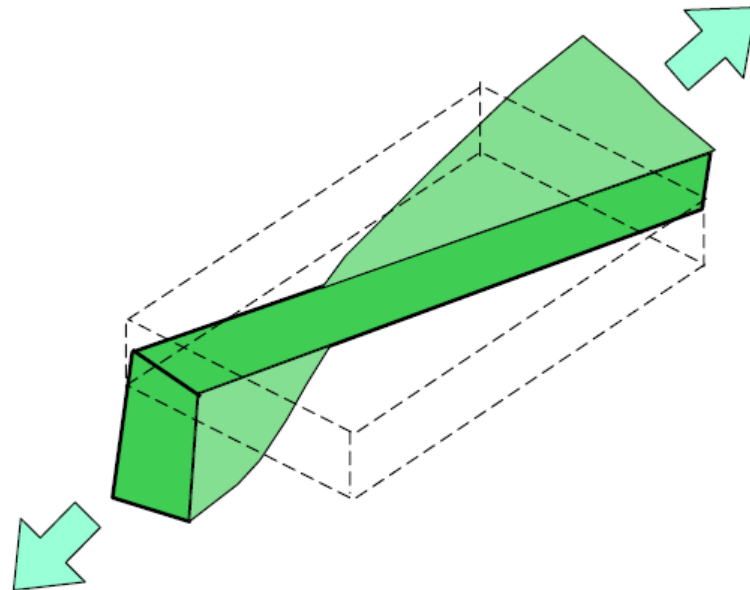


$D_{16} = D_{26} = 0$

# Macromeccanica dei PMC

Naturalmente, l'equazione costitutiva può essere invertita (un'altra volta...).

A volte gli accoppiamenti vengono utilizzati per ottenere degli effetti particolari. Ad esempio, l'accoppiamento trazione-torsione viene utilizzato nei generatori eolici e nelle pale degli elicotteri per ottenere un effetto di regolazione passiva del passo man mano che la velocità di rotazione aumenta.

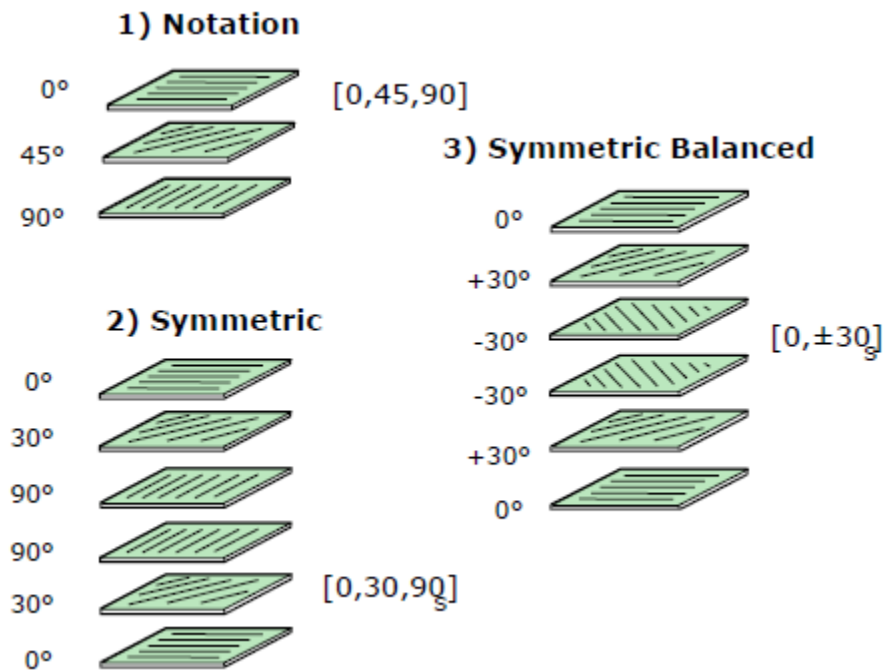




# Macromeccanica dei PMC

Si noti che un PMC può distorcersi, in generale, anche per effetto dell'assorbimento di umidità!

Ciò non succede se il laminato è simmetrico.



## I rinforzi

- Fibre di vetro
- Fibre di carbonio
- Fibre polimeriche

## Le matrici

- Matrici polimeriche
- Matrici metalliche (cenni)
- Matrici ceramiche (cenni)

## Interfacce

## I compositi a matrice polimerica (PMC)

- Processi
- Interfacce
- Struttura e proprietà
- Applicazioni
- Riciclo

## Micromeccanica dei materiali compositi

## Macromeccanica dei materiali compositi

## Resistenza, fatica e creep

