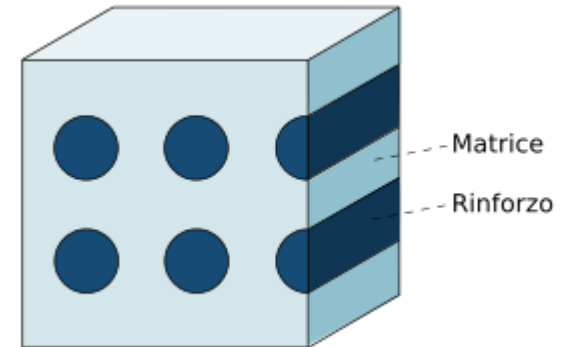




# Materiali compositi





# Micromeccanica dei PMC

Cerchiamo di capire cosa succede, a livello locale, quando si inseriscono delle fibre all'interno di una matrice.

L'obiettivo è quello di stabilire delle relazioni che ci consentano di determinare le proprietà del materiale composito a partire da quelle dei componenti.

- In alcuni casi è sufficiente la regola della miscela, come ad esempio nel calcolo della densità del materiale.
- In altri casi, è necessario studiare il problema in maggiore dettaglio e formulare dei modelli più complessi.



## Densità dei PMC

Consideriamo un composito di massa  $m_c$  e volume  $v_c$ . Valgono le seguenti relazioni:

$$m_c = m_m + m_f$$
$$v_c = v_m + v_f + v_v$$

Dove  $v_v$  è il volume dei vuoti.

Dividendo le due espressioni precedenti per  $m_c$  e  $v_c$  rispettivamente, si ottengono le espressioni riferite alle frazioni di massa.

$$M_m + M_f = 1$$
$$V_m + V_f + V_v = 1$$



## Densità dei PMC

La densità del composito sarà quindi:

$$\rho_c = \frac{m_c}{v_c} = \frac{m_m + m_f}{v_c} = \frac{\rho_m \cdot v_m + \rho_f \cdot v_f}{v_c}$$

Ovvero:

$$\rho_c = \rho_m \cdot V_m + \rho_f \cdot V_f$$

Con analoga procedura, in termini di frazione di massa:

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m} + \frac{V_v}{\rho_c}}$$



## Densità dei PMC

Quest'ultima relazione, può essere usata per calcolare il volume dei vuoti  $V_v$ . Infatti, moltiplicando numeratore e denominatore del membro sinistro dell'equazione per  $\rho_c$ :

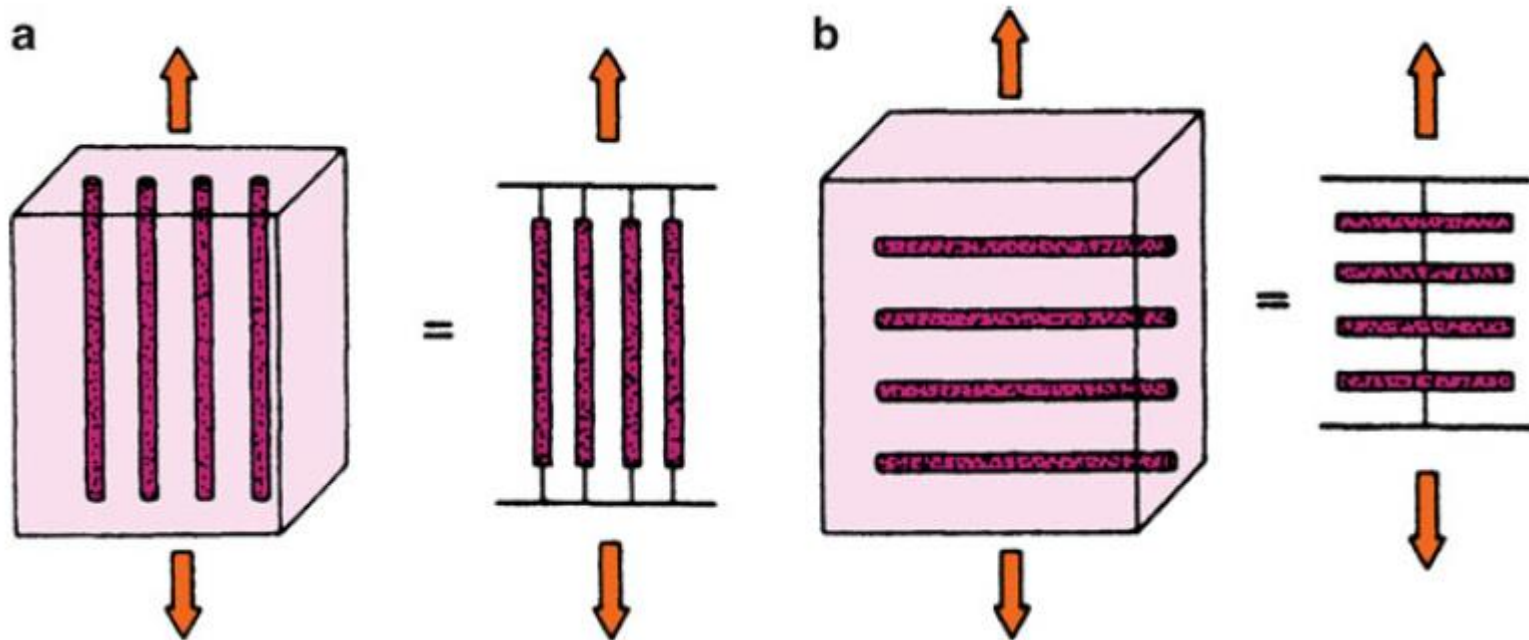
$$\rho_c = \frac{\rho_c}{\rho_c \cdot \left( \frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m} \right) + V_v}$$

Rielaborando:

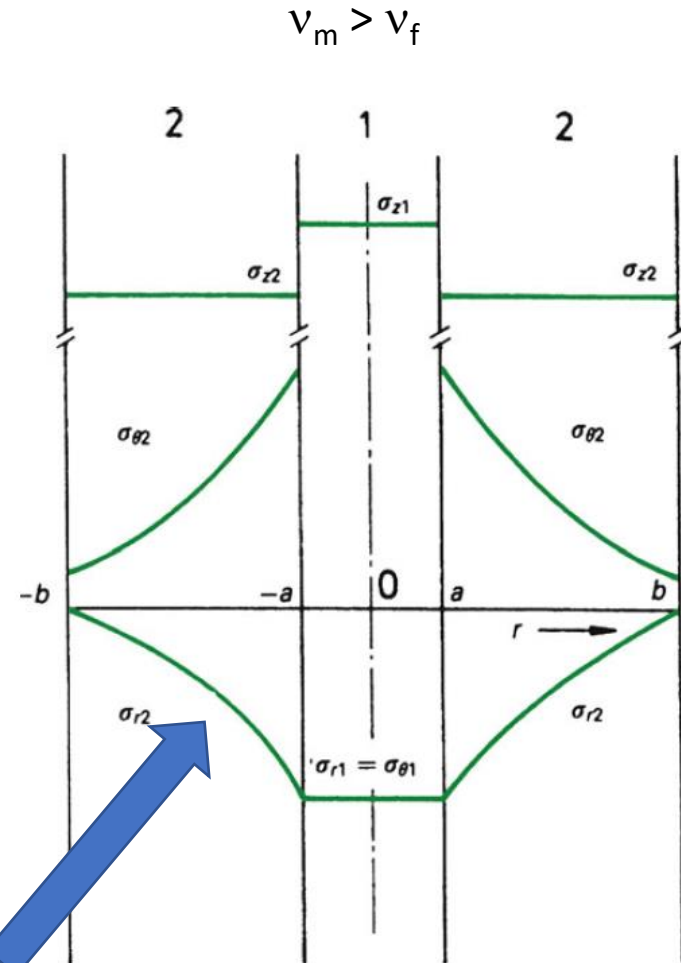
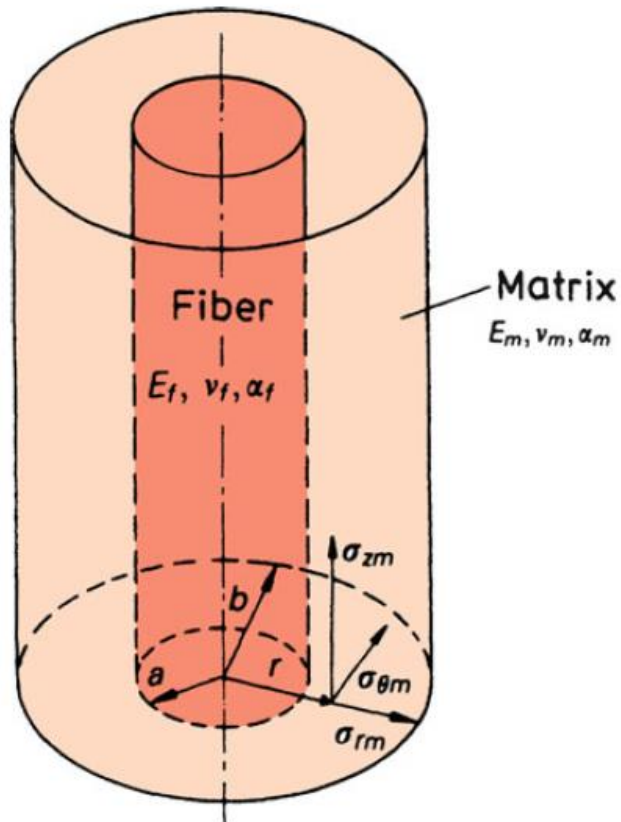
$$V_v = 1 - \rho_c \cdot \left( \frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m} \right)$$

## Proprietà meccaniche dei PMC

Consideriamo un composito come quello rappresentato nella figura sottostante. Ipotizziamo che l'adesione fibre-matrice sia perfetta, che il modulo di Poisson delle due fasi sia il medesimo e che la deformazione sia elastica.



# Proprietà meccaniche dei PMC



Nulla se i moduli di Poisson di 1 e 2 sono identici



## Proprietà meccaniche dei PMC

Nel caso (a), applicando un carico esterno  $P_c$ , la deformazione dei due componenti sarà la medesima (isodeformazione, elementi in parallelo):

$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= \varepsilon_f = \varepsilon_{cl} = \frac{\Delta l}{l} \\ \sigma_f &= E_f \cdot \varepsilon_{cl} \\ \sigma_m &= E_m \cdot \varepsilon_{cl}\end{aligned}$$

Supponiamo che  $A_c$  sia l'area della sezione trasversale del composito,  $A_m$  quella della matrice e  $A_f$  quella complessiva delle fibre. Sarà allora:

$$\begin{aligned}P_c &= P_m + P_f \\ \sigma_{cl} \cdot A_c &= \sigma_m \cdot A_m + \sigma_f \cdot A_f\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\sigma_{cl} \cdot A_c = \varepsilon_{cl} \cdot (E_m \cdot A_m + E_f \cdot A_f)$$





## Proprietà meccaniche dei PMC

Infine, per il modulo elastico del composito ( $E_{cl}$  o  $E_{11}$ ):

$$E_{cl} = \frac{\sigma_{cl}}{\varepsilon_{cl}} = E_f \frac{A_f}{A_c} + E_m \frac{A_m}{A_c}$$

Fissata la lunghezza del composito,  $A_f/A_c = V_f$  e  $A_m/A_c = V_m$ , per cui:

$$E_{cl} = E_{11} = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m$$

Questa è la regola della miscela per i moduli elastici in direzione longitudinale. In modo analogo si può ricavare l'espressione per gli sforzi:

$$\sigma_{cl} = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m \cdot V_m$$



## Proprietà meccaniche dei PMC

Per quanto riguarda le proprietà in direzione trasversale –caso (b)-, possiamo considerare un sistema «in serie» (iso-stress):

$$\sigma_{ct} = \sigma_m = \sigma_f$$

Per gli spostamenti:

$$\Delta t_c = \Delta t_m + \Delta t_f$$

Dividendo per la lunghezza iniziale  $t_c$ :

$$\varepsilon_{ct} = \frac{\Delta t_m}{t_m} \frac{t_m}{t_c} + \frac{\Delta t_f}{t_f} \frac{t_f}{t_c} = \varepsilon_m \frac{t_m}{t_c} + \varepsilon_f \frac{t_f}{t_c}$$



## Proprietà meccaniche dei PMC

Fissata l'area della sezione trasversale del composito, si può scrivere:

$$V_m = \frac{t_m}{t_c}$$
$$V_f = \frac{t_f}{t_c}$$

Pertanto:

$$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f$$

Nel caso considerato, è:

$$\sigma_{ct} = \sigma_m = \sigma_f$$

Pertanto l'equazione precedente può essere riscritta come:



## Proprietà meccaniche dei PMC

$$\frac{\sigma_{ct}}{E_{ct}} = \frac{\sigma_{ct}}{E_m} V_m + \frac{\sigma_{ct}}{E_f} V_f$$

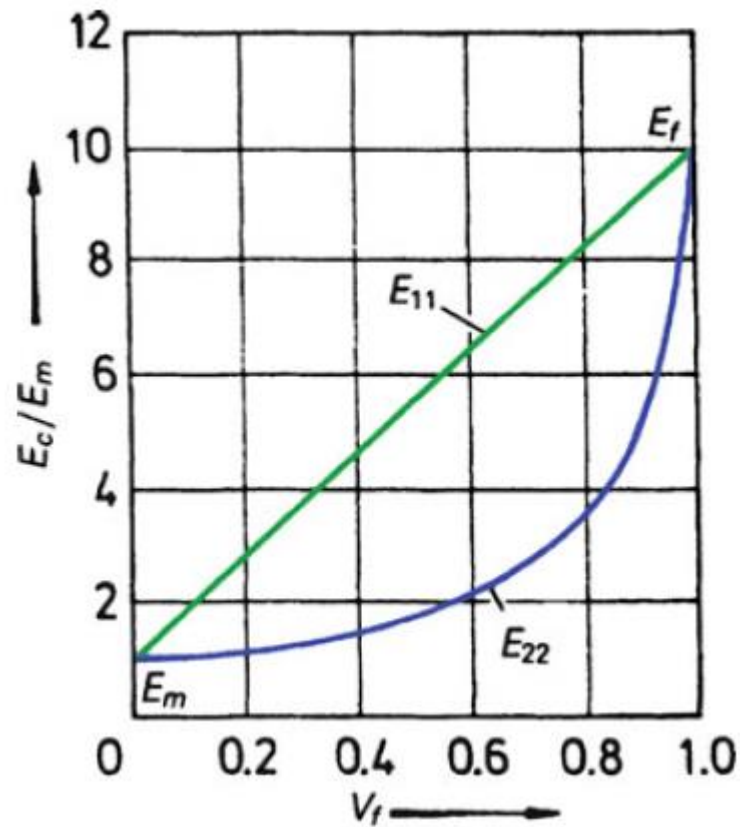
Ovvero:

$$\frac{1}{E_{ct}} = \frac{1}{E_{22}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}$$

Questa è la regola della miscela per il modulo elastico trasversale del materiale composito.

# Proprietà meccaniche dei PMC

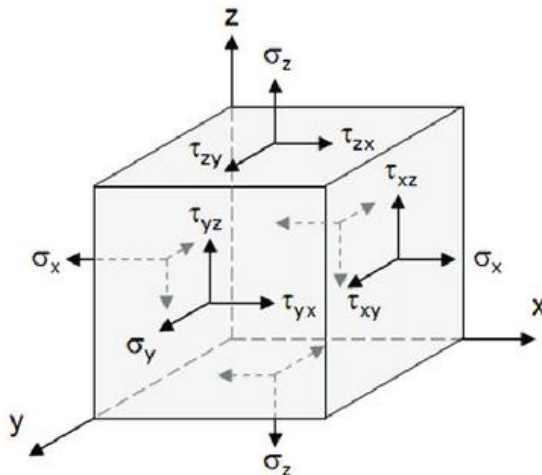
Graficamente:



## Proprietà meccaniche dei PMC

Le regole descritte costituiscono il modello più semplice disponibile in letteratura. Esistono altri approcci più sofisticati, basati sulla micromeccanica del materiale composito, in grado di offrire prestazioni migliori in termini di capacità previsionale delle caratteristiche meccaniche del materiale composito.

Come sappiamo lo stato di tensione e di deformazione di un corpo può essere descritto da 6 componenti.



Tensore delle (piccole) deformazioni

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

È la parte simmetrica della Jacobiana dello spostamento  
(non considero rotazioni locali)

## Proprietà meccaniche dei PMC

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Il coefficiente deriva dall'aver preso la parte simmetrica di  $J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

In notazione compatta:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Dette anche relazioni di congruenza  
deformazione-spostamento

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensore degli sforzi, simmetrico per equil. alla rotazione

**Esercizio: rivedere la teoria della deformazione dei solidi**



## Proprietà meccaniche dei PMC

Per un generico materiale anisotropo (triclino), il legame tra sforzi e deformazioni è rappresentabile con un tensore del quarto ordine, con 81 componenti. Imponendo le condizioni di simmetria del tensore degli sforzi (equil. alla rotazione) e di quello delle deformazioni (parte sym della Jacobiana del piccolo spostamento), le componenti elastiche indipendenti si riducono a 36. Applicando la condizione di simmetria maggiore derivante dal fatto che si suppone l'esistenza di un potenziale elastico in regime di piccole deformazioni, le componenti indipendenti si riducono a 21.

Nel caso di un solido anisotropo (triclino), quindi, per specificarne la risposta elastica è necessario definire 21 grandezze. E' abbastanza raro, tuttavia, incontrare solidi totalmente anisotropi: spesso sono presenti delle simmetrie (ad esempio legate alla presenza del reticolo cristallino nei solidi, oppure dalla distribuzione delle fibre nei materiali compositi, o alla struttura di un laminato o di un materiale naturale come il legno...).





## Proprietà meccaniche dei PMC

La notazione tensoriale del legame tra il tensore degli sforzi e quello delle deformazioni è quella formalmente più corretta, ma è piuttosto «pesante»:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\sigma} \quad (\mathbf{Z}: \text{tensore di cedevolezza})$$

Vengono quindi spesso utilizzate in letteratura notazioni alternative, di tipo matriciale. Una molto usata è quella di **Voigt**: i tensori degli sforzi e deformazioni vengono trasformati in vettori colonna con 6 componenti ed il tensore di rigidità viene trasformato in una matrice 6x6.

Non sono le  
componenti  
tensoriali...



$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33},$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12}.$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33},$$

$$\varepsilon_4 = \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_6 = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

## Proprietà meccaniche dei PMC

La legge di Hooke, sulla base di tale convenzione, diventa pertanto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

- Grazie all'uso delle componenti  $\gamma_{ij}$ , le componenti  $C$  della matrice elastica (relazione costitutiva) sono uguali alle componenti  $E_{mnpq}$  corrispondenti del tensore di rigidità (tensore del quarto ordine).
- La simmetria maggiore di  $\mathbf{E}$  fanno sì che anche la matrice  $\mathbf{C}$  sia simmetrica.

**Esercizio: scrivere l'espressione dei coeff.  $C_{ij}$  in funzione dei coeff.  $E_{mnpq}$**

# Proprietà meccaniche dei PMC

Legame inverso:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

Notare che, per la convenzione adottata, si ottengono le  $\gamma_{ij}$  e non le  $\varepsilon_{ij}$  ( $=1/2 * \gamma_{ij}$ ).  
A causa di questo, le componenti della matrice S non sono tutte uguali a quelle corrispondenti del tensore di cedevolezza elastica Z.



# Proprietà meccaniche dei PMC

In letteratura:

C: matrice di Stiffness

S: matrice di Compliancy



## Proprietà meccaniche dei PMC

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 S_{11} = Z_{1111} & S_{12} = Z_{1122} & S_{13} = Z_{1133} & S_{14} = 2Z_{1123} & S_{15} = 2Z_{1131} & S_{16} = 2Z_{1112} \\
 & S_{22} = Z_{2222} & S_{23} = Z_{2233} & S_{24} = 2Z_{2223} & S_{25} = 2Z_{2231} & S_{26} = 2Z_{2212} \\
 & & S_{33} = Z_{3333} & S_{34} = 2Z_{3323} & S_{35} = 2Z_{3331} & S_{36} = 2Z_{3312} \\
 \hline
 & \text{sym} & & S_{44} = 4Z_{2323} & S_{45} = 4Z_{2331} & S_{46} = 4Z_{2312} \\
 & & & & S_{55} = 4Z_{3131} & S_{56} = 4Z_{3112} \\
 & & & & & S_{66} = 4Z_{1212}
 \end{array} \right]$$

Ovvero, in forma compatta:

$$[S_{ij}] = \left[ \begin{array}{c|c}
 Z_{ppqq} & 2Z_{pprs} \\
 \hline
 2Z_{pprs} & 4Z_{pqrs}
 \end{array} \right]$$

**Esercizio: verificare l'espressione dei coeff.  $S_{ij}$  in funzione dei coeff.  $Z_{mnpq}$**

# Proprietà meccaniche dei PMC

Pensiamo ad un cubo di materiale elastico sottoposto solo alla tensione normale

$\sigma_1$ :

$$\varepsilon_1 = S_{11} * \sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = S_{12} * \sigma_1$$

$$\varepsilon_3 = S_{13} * \sigma_1 \text{ (comp. normali)}$$

$$\varepsilon_4 = S_{14} * \sigma_1$$

$$\varepsilon_5 = S_{15} * \sigma_1$$

$$\varepsilon_6 = S_{16} * \sigma_1 \text{ (comp. taglio)}$$

$$\varepsilon_{11} = Z_{11} * \sigma_{11}$$

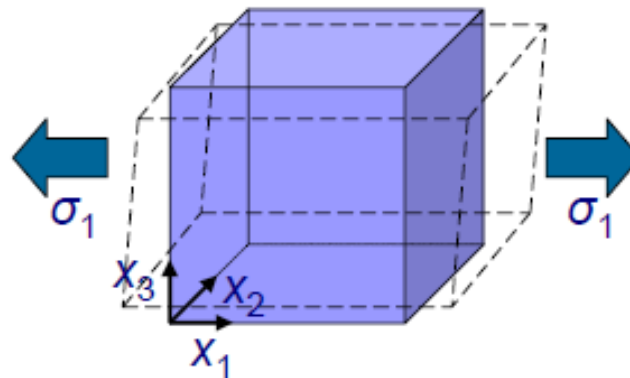
$$\varepsilon_{22} = Z_{12} * \sigma_{11}$$

$$\varepsilon_{33} = Z_{13} * \sigma_{11} \text{ (comp. normali)}$$

$$\varepsilon_{23} = Z_{2311} * \sigma_{11}$$

$$\varepsilon_{13} = Z_{1311} * \sigma_{11}$$

$$\varepsilon_{12} = Z_{1211} * \sigma_{11} \text{ (comp. taglio)}$$





# Proprietà meccaniche dei PMC

In pratica, per un generico materiale anisotropo:

- uno sforzo normale monoassiale genera anche delle deformazioni a taglio.
- Gli accoppiamenti tra sforzo e deformazioni normali (tipo Poisson) dipendono dalla direzione considerata).
- Il cubo deformato, quindi, non diventa un parallelepipedo, ma un prisma irregolare.

**Esercizio: provate a vedere cosa succede se il cubo viene sottoposto ad uno sforzo di taglio.**

# Proprietà meccaniche dei PMC

Accoppiamenti: effetti sconosciuti nei comuni materiali isotropi

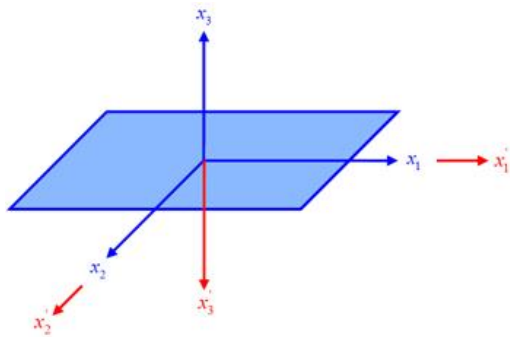




## Proprietà meccaniche dei PMC

Se esistono delle simmetrie, il numero delle componenti indipendenti della matrice di rigidità si riduce.

Esistenza di un piano di simmetria (**materiale monoclinico**): le componenti elastiche indipendenti diventano 13.



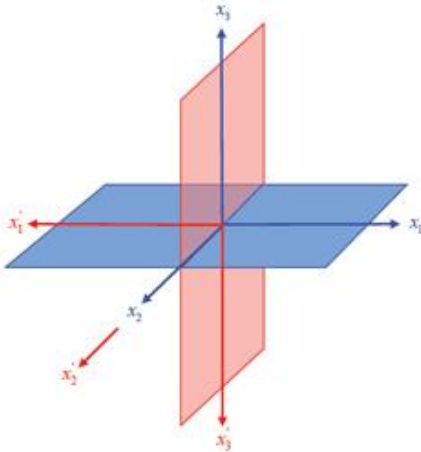
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$



## Proprietà meccaniche dei PMC

Se esistono delle simmetrie, il numero delle componenti indipendenti della matrice di rigidità si riduce.

Esistenza di due piani di simmetria (**materiale ortotropo**): le componenti elastiche indipendenti diventano 9. Questa condizione, se i piani di simmetria sono ortogonali, implica necessariamente l'esistenza di un terzo piano di simmetria ortogonale ai primi due.



$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

## Proprietà meccaniche dei PMC

Nei materiali ortotropi, nel riferimento di simmetria materiale, scompaiono gli accoppiamenti tra sforzi normali e deformazioni a taglio ecc. (restano solo gli effetti Poisson).

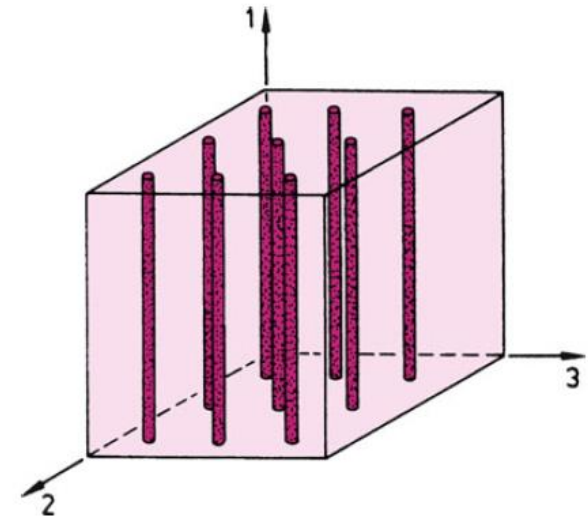
La matrice di cedevolezza, scritta in funzione delle grandezze tecnologiche è:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Proprietà meccaniche dei PMC

In un materiale trasversalmente isotropo (un asse di simmetria di rotazione), le componenti indipendenti sono 5:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



## Proprietà meccaniche dei PMC

Per noi, il caso dei materiali trasversalmente isotropi è molto importante perché i materiali composti da una matrice isotropa rinforzata con fibre orientate disposte in maniera uniforme ha un comportamento trasversalmente isotropo: la direzione di simmetria è quella delle fibre, mentre tutte le direzioni nel piano ortogonale a questa sono equivalenti, assunta l'uniformità di distribuzione delle fibre orientate:

- Legno
- Materiali fibrorinforzati

Si può dimostrare che sono trasversalmente isotropi anche materiali che hanno una simmetria rotazionale per angoli di  $60^\circ$  (condizione più debole, ma comunque sufficiente).

## Proprietà meccaniche dei PMC

Resta infine, per completezza, il caso di un solido completamente isotropo. In questo caso è noto che le costanti elastiche indipendenti sono 2:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



## Proprietà meccaniche dei PMC

Molto spesso, allo scopo di utilizzare delle costanti che possano essere misurate facilmente ed il cui significato fisico sia evidente, si scrivono le 21 costanti delle matrici  $C$  o  $S$  utilizzando le cosiddette costanti tecniche o «costanti dell'ingegnere».

Nel caso di anisotropia totale, esse sono:

- 3 moduli di Young  $E$ ;
- 3 moduli a taglio  $G$ ;
- 3 coefficienti di Poisson  $\nu$ ;
- 3 coefficienti di Chentsov  $\mu$ ;
- 9 coefficienti di influenza mutua di 1° o 2° tipo,  $\eta$ ;

Si definisce anche:  $K$  (modulo bulk),  $\lambda$  (modulo Lamé)

## Proprietà meccaniche dei PMC

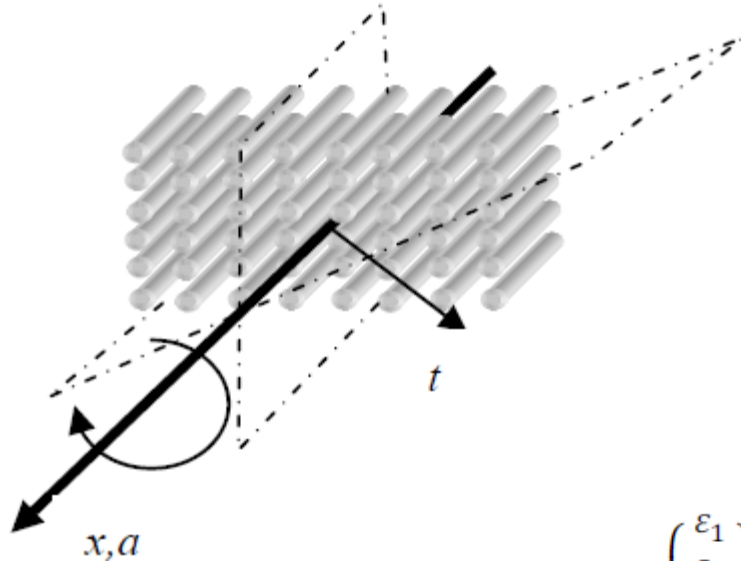
Matrice di compliancy (S) in un materiale anisotropo, secondo le costanti ingegneristiche:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & \frac{\eta_{1,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{1,31}}{G_{31}} & \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & \frac{\eta_{2,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{2,31}}{G_{31}} & \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & \frac{\eta_{3,23}}{G_{23}} & \frac{\eta_{3,31}}{G_{31}} & \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,2}}{E_2} & \frac{\eta_{23,3}}{E_3} & 1/G_{23} & \frac{\mu_{23,31}}{G_{31}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{31,1}}{E_1} & \frac{\eta_{31,2}}{E_2} & \frac{\eta_{31,3}}{E_3} & \frac{\mu_{31,23}}{G_{23}} & 1/G_{31} & \frac{\mu_{31,12}}{G_{12}} \\ \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} & \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}} & \frac{\mu_{12,31}}{G_{31}} & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



# Proprietà meccaniche dei PMC

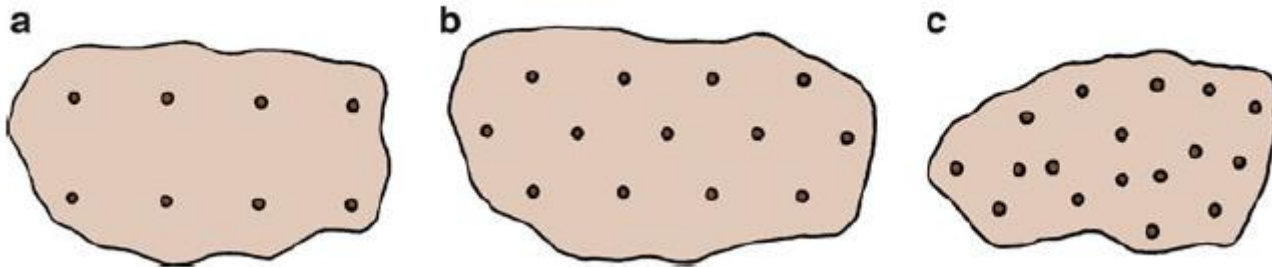
Per un materiale trasversalmente isotropo, la matrice di cedevolezza  $S$  è la seguente:



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

# Proprietà meccaniche dei PMC

Nel caso dei materiali compositi, posso avere diverse situazioni. Ad esempio:



- Caso a: ortotropo (9 costanti)
- Caso b: trasversalmente isotropo (5 costanti)
- Caso c: trasversalmente isotropo (5 costanti)



## Proprietà meccaniche dei PMC

Costanti elastiche di un composito trasversalmente isotropo in funzione delle costanti elastiche delle due componenti (m: isotropa, f: trasversalmente isotrope):

- Servono 2 costanti per la matrice ( $E_m, G_m$ )
- Servono 5 costanti per le fibre ( $E_{f1}, E_{f2}, G_{f12}, G_{f23}, \nu_{f12}$ )

Longitudinal modulus

$$E_{11} = E_{f1}V_f + E_mV_m$$

Transverse modulus

$$E_{22} = E_{33} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - E_m/E_{f2})}$$

Shear modulus

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f12})}$$

Shear modulus

$$G_{23} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f23})}$$

Poisson's ratio

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{f12}V_f + \nu_mV_m$$

Poisson's ratio

$$\nu_{23} = \frac{E_{22}}{2G_{23}} - 1$$

Nota: i due coefficienti di Poissono non sono indipendenti.

## Proprietà meccaniche dei PMC

Le strutture di materiale composito spesso sono fabbricate mediante la sovrapposizione di lamine sottili. In ogni lamina, dato il piccolo spessore, si può supporre sia presente uno stato di stress piano. Se consideriamo una lamina e i soli stress nel piano:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



# Proprietà meccaniche dei PMC

Le deformazioni nel piano saranno quindi:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

E quelle fuori dal piano:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{23} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{56} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



## Proprietà meccaniche dei PMC

Le strutture di materiale composito spesso sono fabbricate mediante la sovrapposizione di lamine sottili ortotrope. Se consideriamo una lamina ortotropa, nel riferimento di ortotropia e lo stato piano di stress:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

## Proprietà meccaniche dei PMC

L'espressione della matrice di cedevolezza e di quella di rigidezza (che può essere calcolata invertendo la matrice S, che a sua volta può essere ottenuta invertendo C) sono le seguenti:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Le grandezze indipendenti, che caratterizzano la lamina, sono 4 (le matrici sono simmetriche). Notare che le grandezze elastiche «fuori piano» possono essere ignorate.



## Proprietà meccaniche dei PMC

Costanti elastiche di un composito trasversalmente isotropo in funzione delle costanti elastiche delle due componenti (m: isotropa, f: trasversalmente isotrope):

- Servono 2 costanti per la matrice ( $E_m, G_m$ )
- Servono 5 costanti per le fibre ( $E_{f1}, E_{f2}, G_{f12}, G_{f23}, \nu_{f12}$ )

Longitudinal modulus

$$E_{11} = E_{f1}V_f + E_mV_m$$

Transverse modulus

$$E_{22} = E_{33} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - E_m/E_{f2})}$$

Shear modulus

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f12})}$$

Shear modulus

$$G_{23} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f23})}$$

Poisson's ratio

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{f12}V_f + \nu_mV_m$$

Poisson's ratio

$$\nu_{23} = \frac{E_{22}}{2G_{23}} - 1$$

Nota: i due coefficienti di Poissono non sono indipendenti.



# Proprietà meccaniche dei PMC

Lamina ortotropa, nel riferimento di ortotropia e stress nel piano:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$



# Proprietà meccaniche dei PMC

Equazioni di Halpin-Tsai:

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1 + \xi\eta V_f}{1 - \eta V_f}$$

$$\eta = \frac{p_f/p_m - 1}{p_f/p_m + \xi}$$

- $p$ : uno dei moduli del materiale composito.
- $p_m$ ,  $p_f$ : il corrispondente modulo della matrice e delle fibre
- $\xi$ : una costante empirica, funzione della frazione vol. di fibre (fitting)



# Proprietà meccaniche dei PMC

Equazioni di Halpin-Tsai:

- Notare i limiti per  $V_f=0$  e  $V_f=1$
- Inoltre:

$$\frac{1}{p} = \frac{V_m}{p_m} + \frac{V_f}{p_f} \quad \xi \rightarrow 0$$

$$p = p_f V_f + p_m V_m \quad \xi \rightarrow \infty$$

Ad esempio:

$$\frac{E_{22}}{E_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad \eta = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + \xi}$$

Questa espressione può essere confrontata con quelle precedentemente riportate, relative alla determinazione delle costanti elastiche.



## Proprietà meccaniche dei PMC

Si ottiene, in questo modo, un set di valori base per  $\xi$ :

Modulus	$\xi$
$E_{11}$	$2(l/d)$
$E_{22}$	0.5
$G_{12}$	1.0
$G_{21}$	0.5
$K$	0

Nielsen introduce il massimo coefficiente d'impaccamento nell'espressione di Halpin-Tsai:

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta \Psi V_f},$$
$$\eta = \frac{p_f/p_m - 1}{p_f/p_m + \xi},$$
$$\Psi \simeq 1 + \left( \frac{1 - \phi_{\max}}{\phi_{\max}^2} \right) V_f,$$



# Proprietà meccaniche dei PMC

In questa espressione, il valore di  $\Phi_{\max}$  vale:

- Per una disposizione delle fibre su una griglia quadra, 0.785
- Per una disposizione delle fibre su una griglia esagonale: 0.907

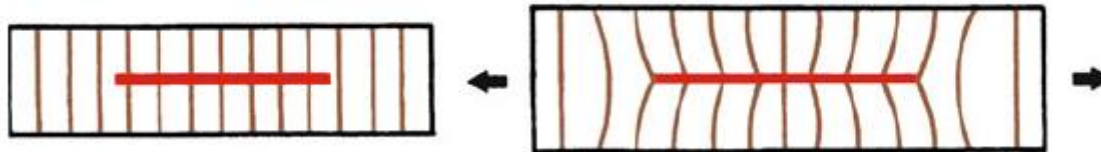
Sono disponibili in letteratura espressioni per la determinazione delle costanti fisiche dei materiali compositi per tutte le altre grandezze di interesse ingegneristico, come ad esempio:

- CTE
- Conducibilità termica
- Conducibilità elettrica
- ecc.

## Trasferimento del carico matrice-fibre

La matrice, oltre a mantenere in posizione ed a proteggere le fibre, agisce anche come mezzo per il trasferimento del carico alle fibre stesse, che rappresentano il vero componente in grado di sostenere il carico.

Consideriamo una fibra ad alto modulo in una matrice a basso modulo. Entrambi i componenti abbiano lo stesso modulo di Poisson:



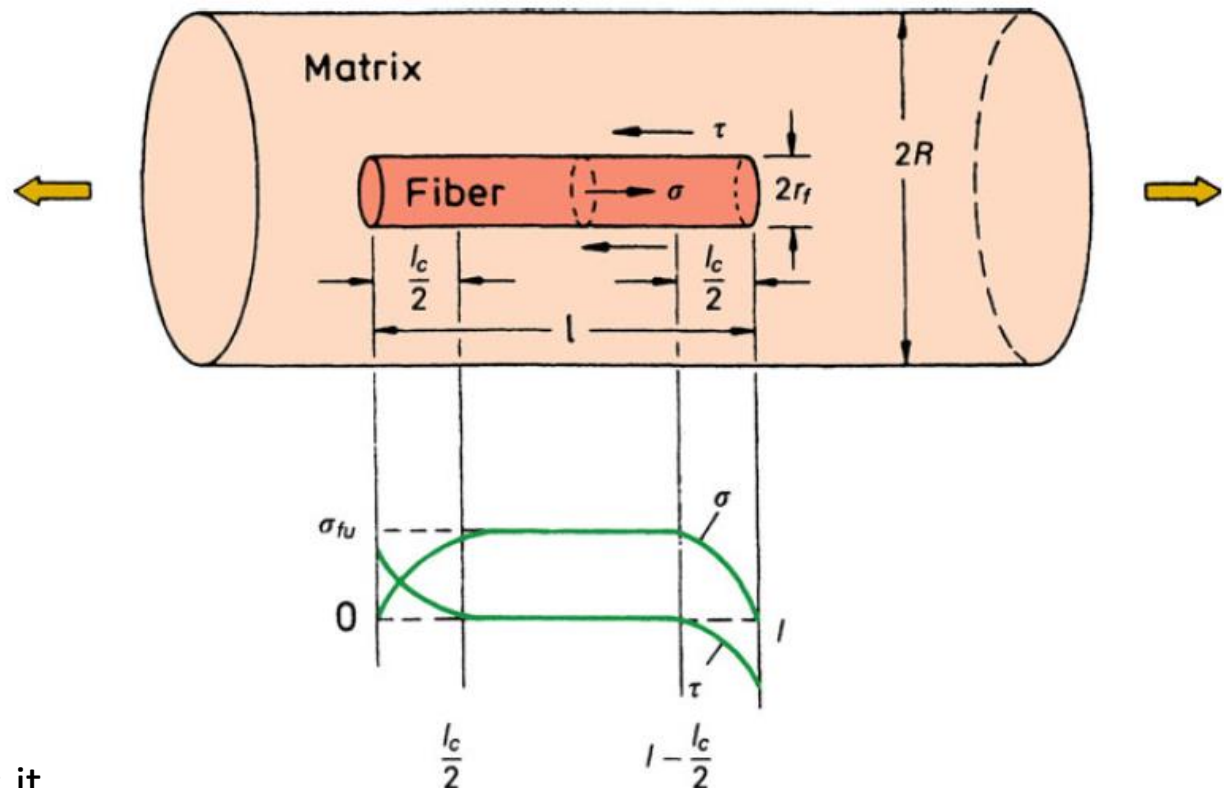
A causa della differente rigidezza, fibra e matrice subiranno diversi allungamenti, il che comporta l'insorgenza di deformazioni a taglio nella matrice su piani paralleli all'asse della fibra.

Il trasferimento del carico matrice  $\rightarrow$  fibre avviene tramite questi sforzi di taglio.

## Trasferimento del carico matrice-fibre

Gli sforzi di taglio all'interfaccia trasferiranno il carico dalla matrice alla fibra, sino al raggiungimento di un valore massimo di strain  $\varepsilon$  della fibra pari a quello bulk della matrice (lontano dalla fibra in direzione radiale).

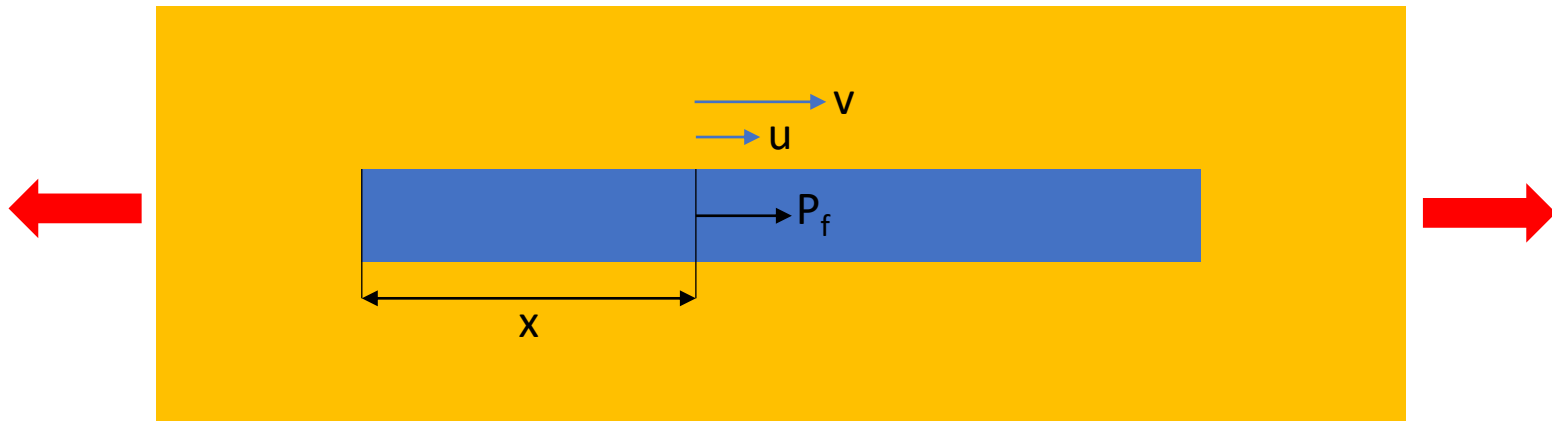
Quindi:  $\sigma_{fu} = E_f \cdot \varepsilon$



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Esaminiamo la distribuzione degli sforzi all'interfaccia fibra-matrice, supponendo che entrambi i componenti si comportino in modo elastico (ok per PMC e CMC, non vero per MMC). Ipotesi:

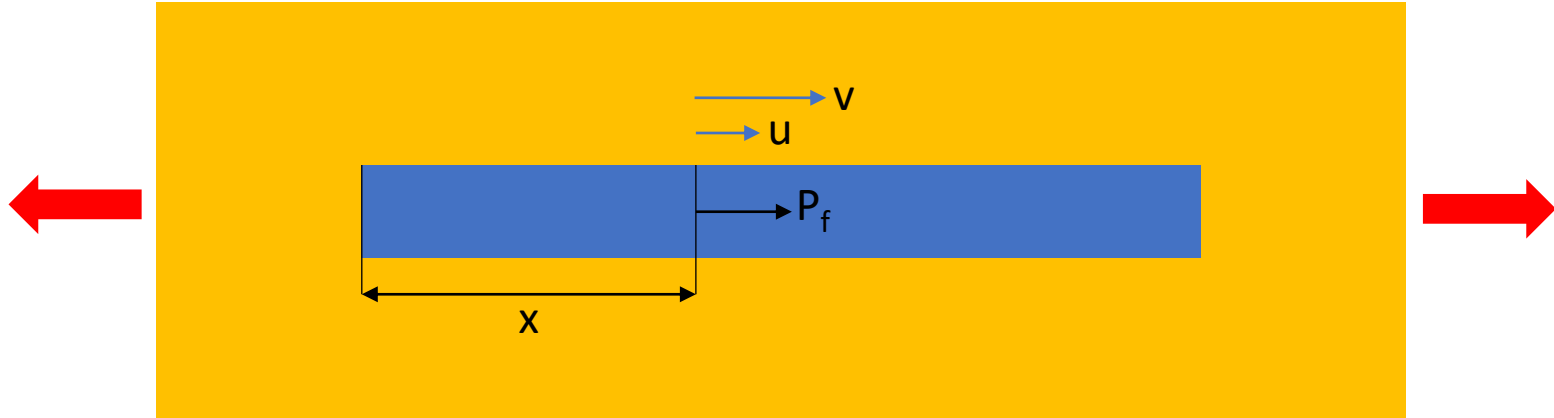
- adesione all'interfaccia perfetta.
- No differenza nei moduli di Poisson  $\rightarrow$  no sforzi trasversali.





## Trasferimento del carico matrice-fibre

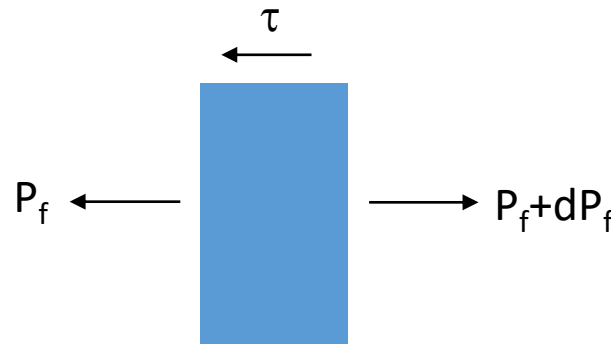
Sia  $v$  è lo spostamento di un punto a distanza  $x$  dall'estremità della fibra in assenza della fibra stessa e  $u$  quello in presenza della fibra:



La differenza nello spostamento è dovuta agli sforzi di taglio presenti all'interfaccia.

## Trasferimento del carico matrice-fibre

Allora, considerando un elemento infinitesimo di fibra di diametro  $D$  si può scrivere l'equazione di equilibrio del corpo libero:



$$(P_f + dP_f) - P_f = -\tau(r_f) \cdot \pi D \cdot dx = A \cdot \gamma \cdot dx = B \cdot (u - v) \cdot dx$$
$$\frac{dP_f}{dx} = B \cdot (u - v)$$

Differenziando rispetto a  $x$ :

$$\frac{d^2 P_f}{dx^2} = B \left( \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right)$$



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Si può osservare quindi che:

$du/dx$  è lo strain della fibra, cioè  $\frac{P_f(x)}{E_f \cdot A_f}$

$dv/dx$  è lo strain nella matrice lontano dalla fibra, ovvero  $e$ .

Pertanto:

$$\frac{d^2 P_f}{dx^2} = B \left( \frac{P_f}{E_f \cdot A_f} - e \right)$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Una soluzione particolare è:  $P_f = E_f \cdot A_f \cdot e$

Si può risolvere l'equazione omogenea associata (ad es. col metodo del polinomio caratteristico), ottenendo la seguente soluzione generale:

$$P_f = E_f \cdot A_f \cdot e + S \cdot \sinh \beta x + T \cdot \cosh \beta x$$

Dove

$$\beta = \left( \frac{B}{A_f \cdot E_f} \right)^{1/2}$$

Condizioni al contorno: per  $x=0$  e  $x=l$ ,  $P_f=0$ .

# Trasferimento del carico matrice-fibre

Sostituendo e semplificando, tra  $x=0$  e  $x=l/2$ :

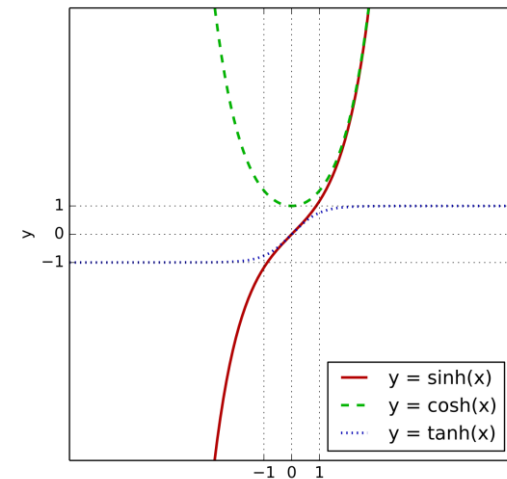
$$P_f = E_f A_f e \left[ 1 - \frac{\cosh \beta \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta \frac{l}{2}} \right]$$

In termini di sforzo nella fibra:

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A_f} = E_f e \left[ 1 - \frac{\cosh \beta \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta \frac{l}{2}} \right]$$

Massimo valore  
possibile

$\sigma_u$



# Trasferimento del carico matrice-fibre

Per quanto riguarda l'andamento dello sforzo di taglio  $\tau(D)$ , ovvero all'interfaccia:

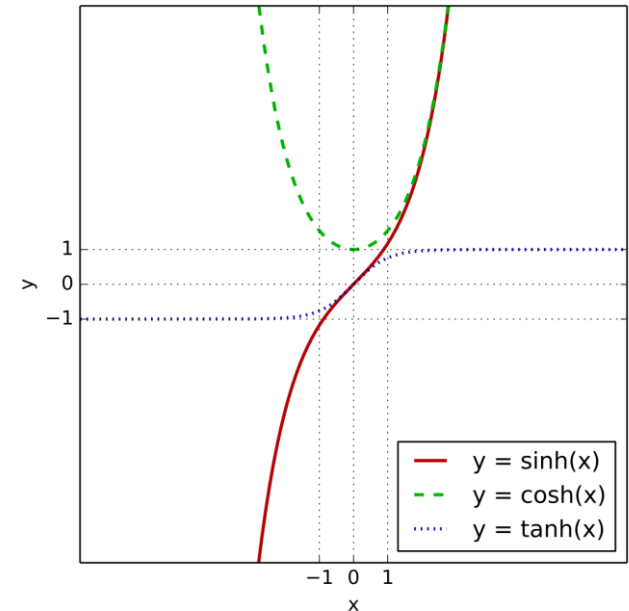
$$\frac{dP_f}{dx} = \tau \cdot \pi D$$

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = \tau \cdot \pi D \cdot \frac{4}{\pi D^2}$$

$$\tau = \frac{D}{4} \cdot \frac{d\sigma_f}{dx}$$

Derivando e sostituendo:

$$\tau = \frac{E_f \cdot D \cdot e \cdot \beta}{4} \cdot \frac{\sinh \beta \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta \frac{l}{2}}$$





## Trasferimento del carico matrice-fibre

Si noti che se lo sforzo di taglio  $\tau$  all'interfaccia dovesse eccedere quello di deformazione elastica della matrice (caso MMC) o la resistenza a taglio dell'adesione fibra-matrice, sono tali valori di sforzo di taglio che dovrebbero essere utilizzati al posto di quello indicato.

Resta da determinare il valore della costante  $B$ . Supponiamo  $l \gg D$  e che la distanza media fibra-fibra sia  $2R$ . Avevamo scritto:

$$-\tau(r_f) \cdot \pi D \cdot dx = B \cdot (u - v) \cdot dx$$

Per cui:

$$B = -\frac{\tau(r_f) \cdot \pi D}{u - v}$$



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Se chiamiamo  $w(r)$  lo spostamento reale della matrice, in funzione della distanza  $r$  dall'asse della fibra, sarà –nella matrice, in condizioni di equilibrio–:

$$\tau(r_f) \cdot 2\pi \cdot r_f = \tau(r) \cdot 2\pi \cdot r = \text{cost.}$$

- Per  $r=r_f$ ,  $w=u$  (no slittamento fibra-matrice)
- Per  $r=R$  si suppone che l'effetto della fibra non si faccia più sentire, per cui  $w=v$

La deformazione a taglio della matrice sarà:

$$\gamma(r) = \frac{dw}{dr} = \frac{\tau(r)}{G_m} = \frac{\tau(r_f) \cdot r_f}{G_m \cdot r}$$



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Posso quindi integrare:

$$\int_{r_f}^R dw = \Delta w \triangleq v - u = \frac{\tau(r_f) \cdot r_f}{G_m} \int_{r_f}^R \frac{1}{r} dr = \frac{\tau(r_f) \cdot r_f}{G_m} \cdot \ln\left(\frac{R}{r_f}\right)$$

Per cui:

$$B = -\frac{\tau(r_f) \cdot \pi D}{u - v} = \frac{2\pi \cdot G_m}{\ln\left(\frac{R}{r_f}\right)}$$

E quindi:

$$\beta = \left(\frac{B}{A_f \cdot E_f}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi \cdot G_m}{A_f \cdot E_f \cdot \ln\left(\frac{R}{r_f}\right)}\right)^{1/2}$$



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Il valore  $R/r_f$  dipende dal tipo di impaccamento di fibre e dalla frazione volumetrica di fibre:

- Per un array a maglia quadra di fibre:  $\ln\left(\frac{R}{r_f}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{V_f}$
- Per un array a maglia esagonale di fibre:  $\ln\left(\frac{R}{r_f}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{\sqrt{3} \cdot V_f}$
- ✓ Si noti che più è grande il rapporto  $G_m/E_f$  e più è grande il valore di  $\beta$  e quindi più rapida la crescita dello sforzo nella fibra.
- ✓ Analisi più rigorose, basate su ipotesi meno restrittive, danno differenze limitate al termine  $\ln(R/r_f)$ .
- ✓ Lo stress nella fibra cresce da un valore nullo all'estremità sino ad un valore massimo, ammesso che la lunghezza della fibra sia sufficiente. Ciò dà adito alla definizione del concetto di lunghezza critica della fibra.
- ✓ Lo stress di taglio è massimo all'estremità della fibra (possibile debonding)



## Trasferimento del carico matrice-fibre

Per calcolare la lunghezza critica di una fibra, consideriamo il caso in cui lo stress di taglio all'interfaccia sia costante. Questa è una semplificazione rispetto al modello precedente, che può acquisire maggior validità nel caso in cui, ad esempio, nelle condizioni reali, vi sia slittamento all'interfaccia (debonding) o deformazione plastica della matrice in condizioni tali che non si verifichi incrudimento (nei MMC).

Il valore dello sforzo di taglio all'interfaccia sarà allora dato, nel primo caso, dalle forze di attrito (generate da eventuali stress radiali, o da legami chimici, o da interlocking) e nel secondo caso dal flow stress della matrice:  $\tau_i$ .

Vale la relazione di equilibrio, scritta per  $x=l/2$ :

$$\sigma_f \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau_i \cdot \pi D \cdot \frac{l}{2}$$



# Trasferimento del carico matrice-fibre

Ovvero:

$$\frac{l}{d} = \frac{\sigma_f}{2 \cdot \tau_i}$$

Se la fibra è abbastanza lunga, potrà raggiungere nella porzione centrale il massimo valore di carico possibile per la fibra stessa, ovvero il suo carico di rottura, altrimenti risulterà «sottoutilizzata».

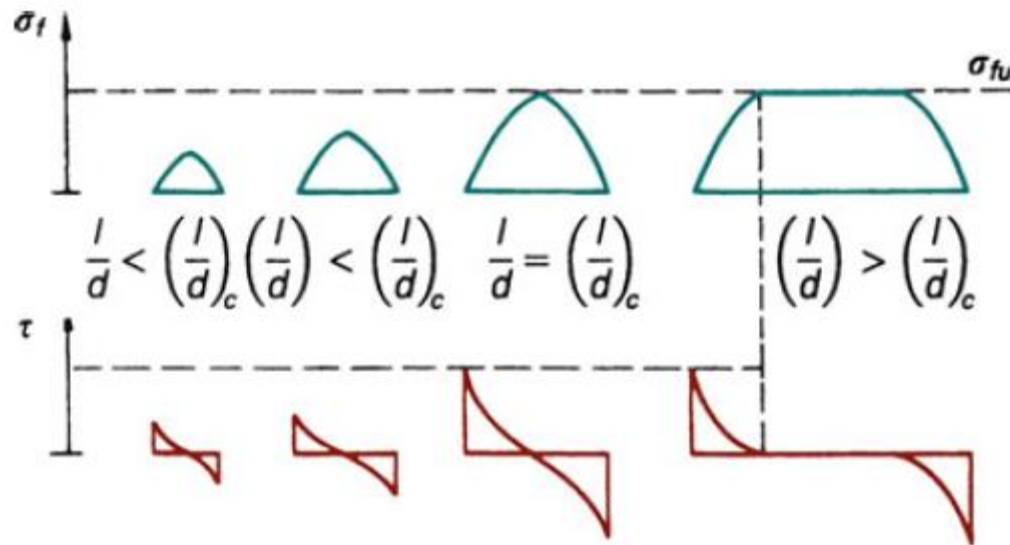
$$\left(\frac{l}{d}\right)_c = \frac{\sigma_{fu}}{2 \cdot \tau_i}$$

Fissato il diametro  $d$  della fibra:

$$l_c = d \cdot \frac{\sigma_{fu}}{2 \cdot \tau_i}$$

# Trasferimento del carico matrice-fibre

Se il rapporto  $l/d$  della fibra considerata varia:





## Trasferimento del carico matrice-fibre

- Si noti che anche per  $l > l_c$  lo stress medio nella fibra è inferiore a quello presente nella porzione centrale.
- Per questo motivo, la lunghezza delle fibre, in un composito «efficiente», deve essere tale che  $l \gg l_c$ .
- Per lo stress medio in una fibra si può infatti scrivere:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f dx = \frac{1}{l} [\sigma_f(l - l_c) + \rho \sigma_f l_c] = \frac{1}{l} [\sigma_f l - l_c(\sigma_f - \rho \sigma_f)]$$

$$\bar{\sigma}_f = \sigma_f \left( 1 - \frac{1 - \rho}{l/l_c} \right)$$

Dove  $\rho * \sigma_f$  è lo stress medio in una frazione di fibra di lunghezza  $l_c$  posta all'estremità.  $\rho$  è esattamente pari a 0.5 per un materiale costituente la matrice perfettamente plastico o nel caso in cui ci sia scivolamento con coefficiente d'attrito costante lungo tutta la superficie (profilo stress lineare).



## Trasferimento del carico matrice-fibre

- Per i suddetti motivi, la resistenza meccanica di un composito a fibre corte sarà sempre inferiore a quella di un composito a fibre lunghe.
- Tuttavia, sopra una certa lunghezza delle fibre, il guadagno in termini di resistenza diventa trascurabile.

## I rinforzi

- Fibre di vetro
- Fibre di carbonio
- Fibre polimeriche

## Le matrici

- Matrici polimeriche
- Matrici metalliche (cenni)
- Matrici ceramiche (cenni)

## Interfacce

## I compositi a matrice polimerica (PMC)

- Processi
- Interfacce
- Struttura e proprietà
- Applicazioni
- Riciclo

## Micromeccanica dei materiali compositi

## Macromeccanica dei materiali compositi

## Resistenza, fatica e creep

