

COMPLEMENTI DI TRASMISSIONE DEL CALORE

Enrico Nobile

DIA - Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste
Via A. Valerio 10, 34127 TRIESTE

ver.: 1 Settembre 2022

Parte I

CONDUZIONE NON STAZIONARIA

1

CASO GENERALE DEI SISTEMI A TEMPERATURA UNIFORME

1.1 INTRODUZIONE

Sebbene il processo di conduzione non stazionaria in un solido sia comunemente dovuto allo scambio termico convettivo dal fluido circostante, altri processi di scambio termico ed energetici possono coesistere, come schematizzato in figura 1:

- Scambio termico per irraggiamento fra il solido e l'ambiente (ad esempio se il solido è contenuto in un'ampia cavità, vuota o riempita di gas trasparente all'irraggiamento, le cui pareti hanno temperatura diversa da quella del solido);
- Flusso termico imposto su tutta, o parte, la superficie del solido (dovuto, ad esempio, ad un riscaldatore elettrico a film attaccato sulla superficie);
- Generazione interna di energia (es.: passaggio di corrente elettrica nel solido).

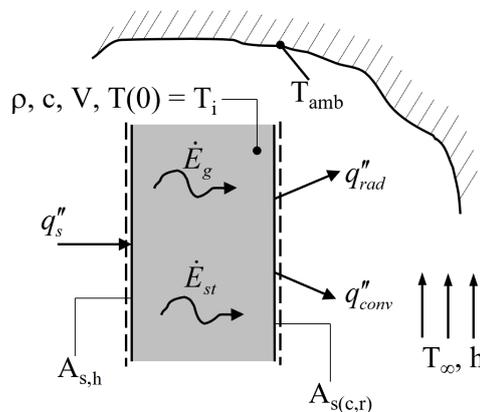


Figura 1: Processi energetici per sistemi a temperatura uniforme.

1.2 CASO GENERALE

Nel caso più generale le ipotesi di lavoro sono le seguenti:

1. Si assume che inizialmente ($\tau = 0$) la temperatura del solido T_i differisce da quella del fluido, T_∞ , e dell'ambiente, T_{amb} .
2. Si ipotizza inoltre che ambedue le modalità di scambio energetico, di superficie q_s'' e volumetrica \dot{E}_g (\dot{E}_g/V), inizino simultaneamente a $\tau = 0$;

3. Il flusso termico imposto e lo scambio termico convettivo-radiativo avvengono su porzioni mutuamente esclusive della superficie, $A_{s,h}$ e $A_{s(c,r)}$;
4. Lo scambio termico convettivo-radiativo avviene dalla superficie del solido;
5. Sebbene la convezione e l'irraggiamento siano stati prescritti sulla stessa superficie, queste, in numerose situazioni, possono differire ($A_{s,c} \neq A_{s,r}$).

Applicando il primo principio (per sistemi chiusi) si ottiene

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g - (q_{conv}'' + q_{rad}'') A_{s(c,r)} \quad (1)$$

ed esplicitando le espressioni note per i flussi termici specifici

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T^4 - T_{amb}^4)] A_{s(c,r)} \quad (2)$$

Sfortunatamente l'equazione (2) è un'equazione differenziale non-lineare, non omogenea del primo ordine, che in generale richiede di venire risolta numericamente, utilizzando uno dei numerosi pacchetti, linguaggi e sistemi disponibili, ad esempio MATLAB®, MATHEMATICA®, Python *odeint*, Julia *OrdinaryDiffEq.jl* etc.

Tuttavia soluzioni analitiche esatte si possono ottenere in alcuni casi semplici.

1.3 CASI PARTICOLARI

1.3.1 Scambio termico solo per irraggiamento

In assenza di flusso termico imposto e di generazione interna, e scambio termico convettivo nullo o trascurabile rispetto allo scambio termico per irraggiamento, l'eq. (2) si semplifica nella

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = -\epsilon \sigma A_{s,r} (T^4 - T_{amb}^4) \quad (3)$$

Separando le variabili ed integrando fra la condizione iniziale ed il generico tempo τ si ottiene

$$\frac{\epsilon \sigma A_{s,r}}{\rho V c} \int_0^\tau d\tau = \int_{T_i}^T \frac{dT}{T_{amb}^4 - T^4} \quad (4)$$

Valutando ambedue gli integrali nell'eq.(4) e risolvendo per il tempo τ necessario per raggiungere la temperatura T , si ottiene

$$\tau = \frac{\rho V c}{4\epsilon A_{s,r} \sigma T_{amb}^4} \left\{ \ln \left| \frac{T_{amb} + T}{T_{amb} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{amb} + T_i}{T_{amb} - T_i} \right| + 2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_{amb}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{amb}} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

o, in un'altra forma¹

$$\tau = \frac{\rho V c}{2\epsilon A_{s,r}\sigma T_{amb}^3} \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_{amb}} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{T}{T_{amb}} \right) \right] - \left[\tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{amb}} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{amb}} \right) \right] \quad (6)$$

Tuttavia, ambedue le espressioni (5) e (6) non si prestano ad essere utilizzate per valutare *esplicitamente* la temperatura T in funzione di τ , T_i e T_{amb} . Inoltre esse non conducono direttamente al risultato per il caso particolare $T_{amb} = 0$ (radiazione nello spazio). Questo caso particolare può essere affrontato partendo nuovamente dalla (4) ed ottenendo

$$\tau = \frac{\rho V c}{3\epsilon A_{s,r}\sigma} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right) \quad (7)$$

1.3.2 Assenza di irraggiamento e coefficiente convettivo indipendente dal tempo

Una soluzione esatta dell'equazione (2) può ottenersi nel caso in cui lo scambio termico per irraggiamento sia nullo o comunque trascurabile, e tutte le altre quantità, a parte naturalmente la temperatura, siano indipendenti dal tempo.

Definendo $\theta \equiv T - T_\infty$, con $d\theta/d\tau = dT/d\tau$, l'equazione (2) si semplifica in un'equazione differenziale non omogenea lineare del primo ordine, la cui forma è

$$\frac{d\theta}{d\tau} + a\theta - b = 0 \quad (8)$$

dove

$$a \equiv (hA_{s,c}/\rho V c)$$

e

$$b \equiv [(q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g) / \rho V c]$$

Sebbene l'equazione (8) possa venir risolta sommando la soluzione dell'equazione omogenea e la soluzione particolare, un'alternativa è quella di eliminare la non omogeneità attraverso la trasformazione

$$\theta' \equiv \theta - \frac{b}{a} \quad (9)$$

Osservando che $d\theta'/d\tau = d\theta/d\tau$, l'equazione (9) può essere sostituita nella (8) ottenendo

$$\frac{d\theta'}{d\tau} + a\theta' = 0 \quad (10)$$

Separando le variabili ed integrando da 0 a τ (da θ'_i a $-\theta'$), si ha

$$\frac{\theta'}{\theta'_i} = \exp(-a\tau) \quad (11)$$

¹ Tale espressione è stata ricavata utilizzando il *Symbolic Toolbox* di *MATLAB*

e sostituendo per θ' e θ

$$\frac{T - T_\infty - (b/a)}{T_i - T_\infty - (b/a)} = \exp(-a\tau) \quad (12)$$

da cui

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-a\tau) + \frac{b/a}{T_i - T_\infty} [1 - \exp(-a\tau)] \quad (13)$$

È immediato notare che la (13), come dev'essere, per $b = 0$ si semplifica nella più semplice espressione ricavata, sempre nel metodo dei parametri concentrati, nel caso di solo scambio termico convettivo, e fornisce $T = T_i$ per $\tau = 0$.

Inoltre, per $\tau \rightarrow \infty$ la (13) si riduce a $(T - T_\infty) = (b/a)$, risultato che può essere facilmente ottenuto attraverso un bilancio di primo principio sulla superficie del corpo di figura 1.

1.3.3 Solo convezione con coefficiente convettivo variabile

In alcuni casi, quali ad esempio la convezione naturale o l'ebollizione, il coefficiente convettivo h varia con la differenza di temperatura fra il corpo ed il fluido circostante. In queste situazioni, il coefficiente di scambio termico convettivo può venir approssimato con un'espressione del tipo

$$h = C (T - T_\infty)^n \quad (14)$$

dove n è una costante ed il parametro C ha dimensioni $W/(m^2 K^{1+n})$.

Se l'irraggiamento, il flusso termico imposto e la generazione interna sono nulli o trascurabili, l'equazione (2) si semplifica nella

$$-C (T - T_\infty)^n A_{s,c} (T - T_\infty) = -C A_{s,c} (T - T_\infty)^{n+1} = \rho V c \frac{dT}{d\tau} \quad (15)$$

Sostituendo θ e $d\theta/d\tau$ nella precedente espressione, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \left[\frac{n C A_{s,c} \theta_i^n}{\rho V c} \tau + 1 \right]^{-1/n} \quad (16)$$

L'equazione (16) si riduce all'espressione nota di conduzione non stazionaria nel caso di coefficiente convettivo indipendente dalla temperatura, $n = 0$.

1.4 ESEMPI

1.4.1 Problema 5.11 da [1]

La piastra di un ferro da stiro ha uno spessore $L = 7$ mm, è realizzata con una lega di alluminio ($\rho = 2800$ kg/m³, $c = 900$ J/(kgK), $k = 180$ W/(mK)), ed è caratterizzata da un valore dell'emissività superficiale $\epsilon = 0.80$.

La piastra è riscaldata da una resistenza elettrica disposta sulla sua superficie interna, mentre la superficie esterna è esposta all'aria, con $T_\infty = 20$ °C,

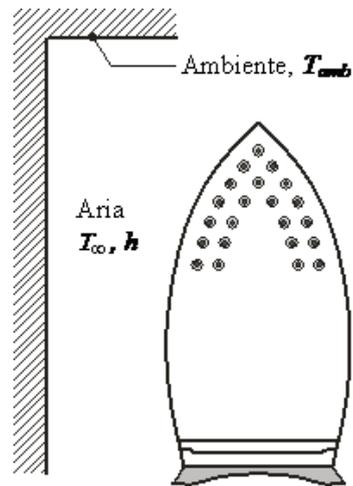


Figura 2: Schema del ferro da stiro.

ed alle superfici circostanti, a temperatura $T_{amb} = 18^\circ\text{C}$.

Se il flusso termico specifico fornito dalla resistenza elettrica è pari a $q'' = 1.25 \times 10^4 \text{ W/m}^2$, ed il coefficiente convettivo sulla superficie esterna è pari a $h = 10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, stimare il tempo necessario per portare la piastra, da una temperatura iniziale $T_i = T_\infty$, alla temperatura di esercizio $T_p = 135^\circ\text{C}$. La costante di Stefan-Boltzmann vale $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$.

Soluzione

La soluzione del problema viene affrontata secondo tre diverse modalità:

1. Metodo dei parametri concentrati - approccio *analitico*;
2. Metodo dei parametri concentrati - approccio *numerico*;
3. Metodo generale (dipendenza spaziale della temperatura) - approccio *numerico*.

Per tutte le tre modalità, le ipotesi semplificative sono le seguenti:

- Lo scambio termico radiativo avviene fra una superficie piccola, il ferro da stiro, ed una cavità di ampie dimensioni, l'ambiente;
- Il coefficiente convettivo è tempo-invariante;
- Le proprietà termofisiche sono costanti ed uniformi;
- Il ferro da stiro si trova inizialmente in condizioni isoterme alla temperatura $T_i = T_\infty$.

Metodo dei parametri concentrati - approccio analitico

Per poter utilizzare il metodo dei parametri concentrati, per via analitica o numerica, è dapprima necessario valutare se il numero di *Biot*, Bi , è inferiore a 0.1. La valutazione del numero di *Biot* può basarsi sul solo scambio termico convettivo, sul (massimo) scambio termico per irraggiamento o, in modo

conservativo, sul contributo di ambedue. Utilizzando quest'ultima tipologia di valutazione, si ha

$$q_{irr} = A_s \epsilon \sigma (T(\tau)^4 - T_{amb}^4)$$

dove A_s è la superficie di un lato della piastra.

Assumendo $T(\tau) = \text{cost} = T_p = 135^\circ\text{C} = 408.15\text{K}$, corrispondente alla condizione di massimo scambio termico per irraggiamento, la relazione precedente può essere scritta utilizzando il coefficiente di scambio termico per irraggiamento h_r

$$q_{irr} = A_s h_r (T_p - T_{amb})$$

con

$$h_r = \epsilon \sigma (T_p + T_{amb}) (T_p^2 + T_{amb}^2)$$

Nel nostro caso, osservando che a rigore essendo $T_p = T_p(\tau)$ anche h_r varierà nel tempo, risulta

$$h_r \approx 8 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Tale valore è dello stesso ordine di grandezza del coefficiente di scambio convettivo, e perciò lo scambio termico per irraggiamento non può essere trascurato.

Possiamo perciò definire il *coefficiente di scambio termico globale* h_{tot} , definito in modo tale che sia

$$\begin{aligned} q''_{tot} &= q''_{conv} + q''_{irr} = h (T_p - T_\infty) + h_r (T_p - T_{amb}) \\ &\approx h_{tot} (T_p - T_\infty) \end{aligned}$$

avendo assunto, per semplicità, $T_{amb} \approx T_\infty$, ipotesi accettabile visti i valori molto vicini.

Otteniamo

$$h_{tot} = h + h_r \cong 18 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \quad (17)$$

e quindi valutare il numero di *Biot*, osservando che in questo caso si utilizza, come dimensione caratteristica, L e non $L/2$, poiché lo scambio termico convettivo ha luogo solo su un lato

$$Bi = \frac{h_{tot} L}{k} = 7 \times 10^{-4}$$

Si tratta di un valore molto basso, che rende perfettamente legittimo l'utilizzo del metodo dei parametri concentrati (LCM - Lumped Capacitance Method).

Considerando quindi l'espressione vista per il caso generale, eq.(2), ed osservando che, in questo caso

$$\begin{aligned} \dot{E}_g &= 0 \\ A_{s(c,r)} &\equiv A_{s,h} = A_s \\ V &= L A_s \end{aligned}$$

si ottiene

$$\rho L A_s c \frac{dT}{d\tau} = q''_s A_s - [h (T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T^4 - T_{amb}^4)] A_s \quad (18)$$

Utilizzando l'espressione (17) per il coefficiente globale di scambio termico e le semplificazioni viste ($h_{\text{tot}} = \text{cost.}$ e $T_{\text{amb}} \approx T_{\infty}$), l'equazione (18) si semplifica nella

$$\rho L c \frac{dT}{d\tau} = q_s'' - h_{\text{tot}} (T - T_{\infty}) \quad (19)$$

Definendo

$$\theta = T - T_{\infty}$$

si ottiene

$$\frac{d\theta}{d\tau} + a\theta - b = 0 \quad (20)$$

con

$$a = \frac{h_{\text{tot}}}{\rho L c}$$

$$b = \frac{q_s''}{\rho L c}$$

Un metodo possibile per risolvere l'equazione (20) è quello di definire una variabile ausiliaria

$$\theta' \equiv \theta - \frac{b}{a}$$

da cui, osservando che $d\theta'/d\tau = d\theta/d\tau$, si ottiene

$$\frac{d\theta'}{d\tau} + a\theta' = 0$$

Separando le variabili ed integrando

$$\ln \frac{\theta'}{\theta'_i} = -a\tau$$

$$\ln \frac{T - T_{\infty} - b/a}{T_i - T_{\infty} - b/a} = -a\tau$$

da cui

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{b/a}{T_i - T_{\infty}} [1 - \exp(-a\tau)] + \exp(-a\tau) \quad (21)$$

1. È agevole verificare che per $q'' = 0$ si ha $b = 0$ e quindi la (21) diventa

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp(-a\tau) = \exp\left(-\frac{h_{\text{tot}} A_s}{\rho V c}\right)$$

cioè il caso, ben noto, di transitorio con solo scambio termico convettivo.

2. Analogamente, per $\tau \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{b/a}{T_i - T_{\infty}}$$

cioè

$$T = T_{\infty} + \frac{q''}{h_{\text{tot}}}$$

che è lo stesso risultato al quale si perviene attraverso un bilancio sulla superficie in condizioni stazionarie, figura 3

$$q'' = q''_{\text{conv}} + q''_{\text{irr}} = h_{\text{tot}} (T - T_{\infty})$$

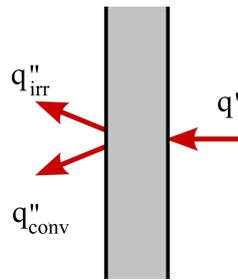


Figura 3: Bilancio di energia per la piastra.

Nel nostro caso

$$b = \frac{q''}{\rho L c} = 0.7086 \text{ K/s}$$

$$a = \frac{h_{\text{tot}}}{\rho L c} = 1.024 \times 10^{-3} \text{ K/s}$$

da cui

$$\tau = 177.4 \text{ s}$$

Metodo dei parametri concentrati - approccio numerico

L'analisi viene svolta, in MATLAB[®], per mezzo della funzione `ode45`², utilizzata per la soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie (*ode - ordinary differential equations*).

A differenza dell'approccio analitico appena visto, semplificato assumendo $h_{\text{tot}} = \text{cost.}$ e $T_{\text{amb}} \approx T_{\infty}$, in questo caso il problema matematico viene affrontato senza semplificazioni. L'equazione utilizzata è pertanto la (18) che, per la risoluzione in MATLAB[®], viene scritta in forma esplicita come

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\rho L c} [q''_s - h(T - T_{\infty}) - \epsilon \sigma (T^4 - T_{\text{amb}}^4)] \quad (22)$$

Il calcolo viene eseguito sfruttando la *gestione di eventi (event handler)* disponibile in MATLAB[®], considerando quale unico *evento* il raggiungimento della temperatura T_p . Lo script MATLAB[®] è riportato in Appendice A.

L'andamento della della temperatura della piastra, in funzione del tempo, calcolato numericamente è riportato in figura 4

Il risultato fornito dallo script è il seguente:

```

-----
08-Nov-2022
-----
Conduzione non stazionaria nella piastra di un ferro da stiro
5 (Es. 5.9 di Fundamentals of Heat and Mass Transfer,
T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, D. P. Dewitt
7th Edition, Wiley, 2011)
-----
Tempo necessario a raggiungere la temperatura Tp =135[°C]
10 176.4459[s]
-----

```

² `ode45` risolve equazioni differenziali o sistemi di equazioni differenziali del tipo $dy/d\tau = f(\tau, y)$ da τ_0 a τ_f con condizione iniziale y_0 . È probabilmente il solutore di equazioni differenziali più versatile, fra quelli disponibili in MATLAB[®], che andrebbe perciò usato in prima battuta. Si rimanda alla documentazione disponibile in MATLAB[®] per ulteriori informazioni.

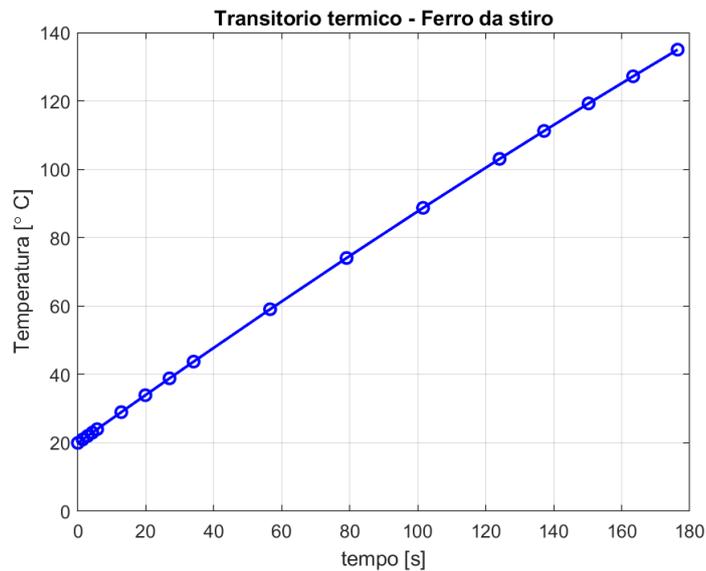


Figura 4: Andamento della temperatura della piastra del ferro da stiro in funzione del tempo.

Il risultato differisce di solo lo 0.5% da quello ottenuto, con le semplificazioni viste, per via analitica.

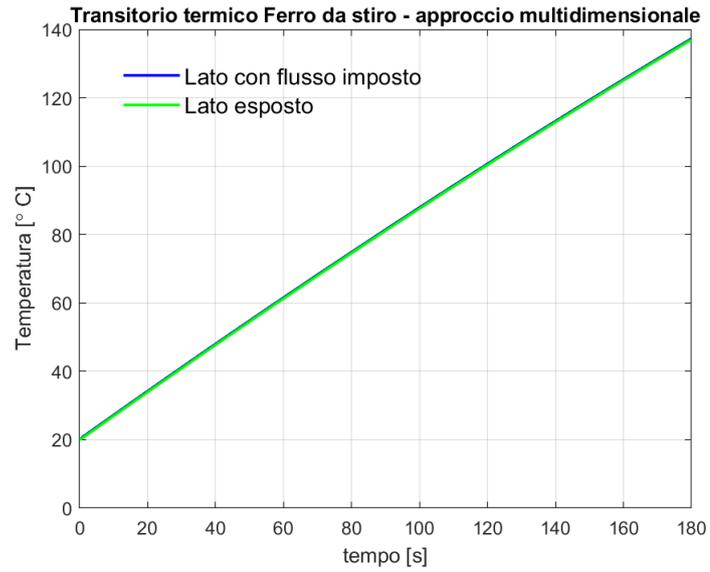
Metodo generale (dipendenza spaziale della temperatura) - approccio numerico

La validità dell'ipotesi di sostanziale indipendenza spaziale delle temperatura, verificata attraverso la verifica del numero di *Biot*, viene qua confermata attraverso un'analisi numerica nella quale si tiene conto della possibile non uniformità della temperatura della piastra durante il riscaldamento. L'analisi viene effettuata tramite il *Partial Differential Equation Toolbox*TM di MATLAB[®], basato sul metodo degli elementi finiti. Anche in questa analisi, lo scambio termico per irraggiamento viene calcolato in modo corretto, non facendo uso dell'ipotesi semplificativa di coefficiente di scambio termico per irraggiamento costante. Il calcolo è stato effettuato con griglie bidimensionali triangolari, con funzioni di forma Lagrangiane-quadratiche, a risoluzione crescente, sino a garantire una soluzione indipendente dalla griglia adottata.

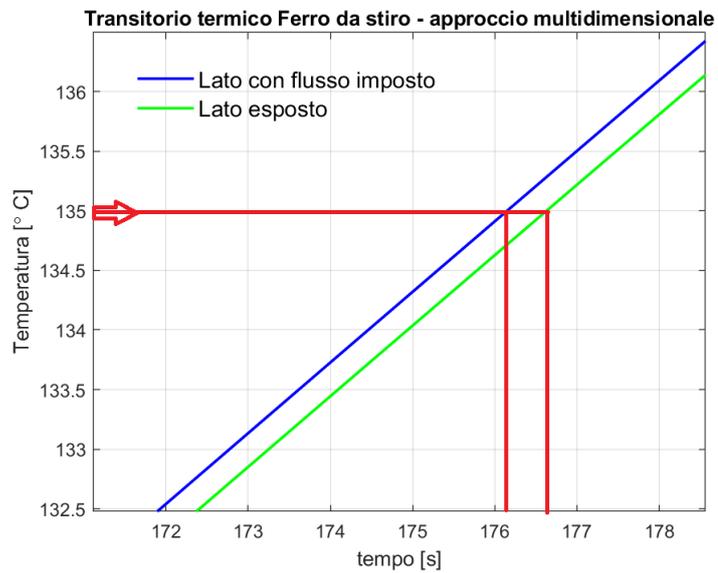
Il grafico in figura 5a riporta l'andamento della temperatura alle due estremità della piastra, mentre la figura 5b riporta il dettaglio nell'intorno della temperatura $T_p = 135^\circ\text{C}$, dal quale si nota la differenza trascurabile di temperatura fra le estremità: infatti, dalla simulazione risulta che l'estremità con flusso termico imposto raggiunge la temperatura T_p dopo circa 176.2 [s], mentre l'estremità soggetta a scambio termico la raggiunge dopo un tempo di 176.6 [s].

La modesta differenza fra i due valori indica nuovamente la pressochè totale indipendenza spaziale della temperatura.

Infine, a scopo illustrativo, la figura 6 riporta il campo termico di un concio della piastra al raggiungimento della temperatura minima T_p , che conferma la sostanziale uniformità della temperatura.



(a)



(b)

Figura 5: Andamento della temperatura della piastra del ferro da stiro in funzione del tempo con l'approccio multidimensionale: (a) Andamento complessivo; (b) Andamento nell'intorno di $T_p = 135^\circ\text{C}$.

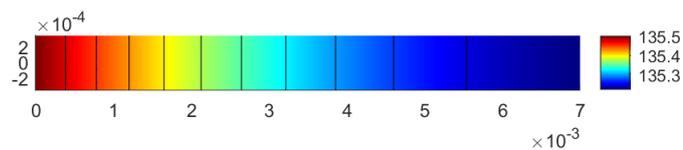


Figura 6: Campo termico della piastra del ferro da stiro al raggiungimento della temperatura di esercizio T_p .

Commenti

- Tutti i tre approcci - analitico a parametri concentrati, numerico a parametri concentrati e numerico multidimensionale - forniscono, com'era logico attendersi visti i valori molto bassi del numero di *Biot*, pressochè lo stesso risultato.
- A rigore, in presenza di scambio termico in convezione naturale come in questo caso, anche il coefficiente di scambio termico convettivo h , così come il coefficiente di scambio termico per irraggiamento h_r , varia con la differenza di temperatura, come indicato dall'equazione (14).

1.4.2 Esempio 5.3 da [1]

In questo problema un pannello di lega di alluminio ($k = 177 \text{ W}/(\text{m K})$, $c = 875 \text{ J}/(\text{kg K})$, e $\rho = 2770 \text{ kg}/\text{m}^3$) di spessore $2L = 3 \text{ mm}$ è rivestito su ambedue le facce con uno strato di epoxy (caratterizzato da un valore dell'emissività $\epsilon = 0.8$), che deve essere indurito in forno, ad una temperatura maggiore o uguale di 150°C , per almeno 5 minuti.

La linea di produzione per il trattamento prevede due fasi:

1. Riscaldamento in un forno le cui pareti sono a $T_{\text{amb},f} = 175^\circ\text{C}$ ed in cui l'aria ha una temperatura $T_{\infty,f} = 175^\circ\text{C}$, e nel quale il coefficiente di scambio termico è stimato pari a $h_f = 40 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$;
2. Raffreddamento successivo in un ambiente chiuso di grandi dimensioni, le cui pareti si trovano a $T_{\text{amb},c} = 25^\circ\text{C}$ e l'aria è a $T_{\infty,c} = 25^\circ\text{C}$, con un coefficiente di scambio termico convettivo $h_c = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$.

La fase di riscaldamento del processo è eseguita per un intervallo di tempo τ_e che, come osservato, eccede il tempo τ_c , necessario per raggiungere la temperatura di 150°C , di 5 minuti ($\tau_e = \tau_c + 300\text{s}$). Le due fasi indicate sono schematizzate in figura 7.

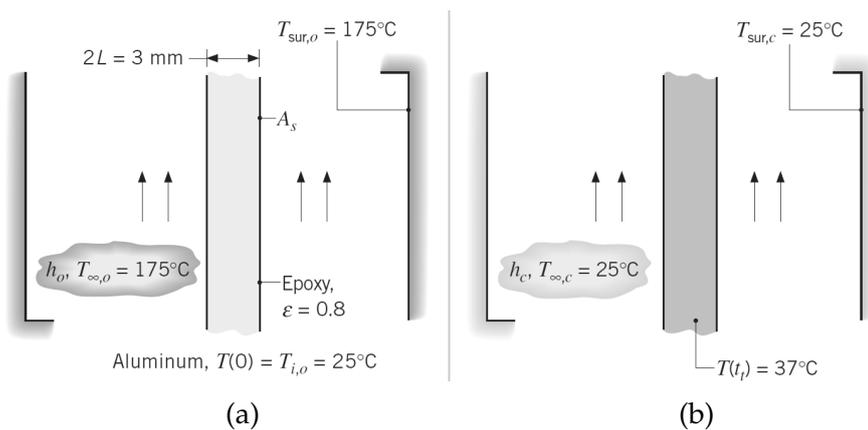


Figura 7: Fasi del processo per il pannello di alluminio: (a) Riscaldamento in forno; (b) Raffreddamento in aria.

Se il pannello è introdotto nel forno ad una temperatura iniziale di 25°C , e viene rimosso a fine raffreddamento ad una temperatura, sicura per gli operatori, di 37°C , quanto vale il tempo necessario per l'intero trattamento?

Soluzione

Per determinare l'applicabilità del metodo dei parametri concentrati, operiamo come già visto al punto 1.4.1, in questo caso valutando i coefficienti globali di scambio termico e quindi i valori del numero di *Biot* per ambedue le fasi di riscaldamento e raffreddamento.

Sulla base dei valori numerici è agevole verificare che, nelle fasi di riscaldamento e raffreddamento, i valori rappresentativi di h_r (coefficiente di scambio termico per irraggiamento) sono i seguenti:

$$\begin{aligned} h_{r,f} &= 15.0 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \quad \text{con } T_p = 423.15 \text{ K} \text{ e } T_{\text{amb}} = 448.15 \\ h_{r,c} &= 8.8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \quad \text{con } T_p = 423.15 \text{ K} \text{ e } T_{\text{amb}} = 298.15 \end{aligned}$$

Anche in questo esempio, i valori del coefficiente di scambio termico per irraggiamento sono dello stesso ordine di grandezza dei coefficienti di scambio convettivo, e perciò lo scambio termico per irraggiamento non può essere trascurato.

Pertanto i valori del numero di Biot, basati sul *coefficiente di scambio termico globale*, sono³:

$$\begin{aligned} Bi_f &= \frac{(h_f + h_{r,f}) L}{k} = 4.6 \times 10^{-4} \\ Bi_c &= \frac{(h_c + h_{r,c}) L}{k} = 1.6 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

quindi l'approccio ai parametri concentrati è ampiamente giustificato e corretto.

Nel problema in esame non vi è generazione interna di energia, e non vi sono parti della superficie del pannello sulle quali il flusso termico sia noto ed imposto. Osservando che⁴

$$V = L A_s \quad (23)$$

$$A_{s,c} = A_{s,r} = A_s \quad (24)$$

la (2) si semplifica nella

$$\rho L c \frac{dT}{d\tau} = - [h(T - T_\infty) + \epsilon \sigma (T^4 - T_{\text{amb}}^4)] \quad (25)$$

Soluzione

Anche qua l'analisi viene svolta, in MATLAB[®], per mezzo della funzione ode45.

In questo caso vanno però considerati due eventi: (1) il raggiungimento della temperatura di riscaldamento e (2) il raffreddamento sino alla temperatura di sicurezza. Fra i due è necessario procedere al calcolo della temperatura del pannello durante il riscaldamento per il tempo necessario alla polimerizzazione dello strato di epoxy.

Il risultato fornito dallo script MATLAB[®] è il seguente:

- 3 In questo caso, a differenza del problema precedente, si utilizza come dimensione caratteristica L , semi-spessore del pannello, poichè lo scambio termico ha luogo su ambedue le facce del pannello.
- 4 Si noti che il volume del pannello è dato da $V = 2L A_s/2$, visto che A_s è pari a due volte l'area di una faccia del pannello, da cui l'espressione (23).

 Condizione non stazionaria in una lastra di alluminio
 con rivestimento in epoxy da indurire con
 riscaldamento in forno e successivo raffreddamento

5 Tempo totale necessario =986.273[s]

Di cui:

Tempo per il riscaldamento =423.0468[s]

Tempo per il raffreddamento =563.2263[s]

L'andamento della temperatura del pannello in funzione del tempo nel corso dell'intero processo, calcolato numericamente, è riportato in figura 8

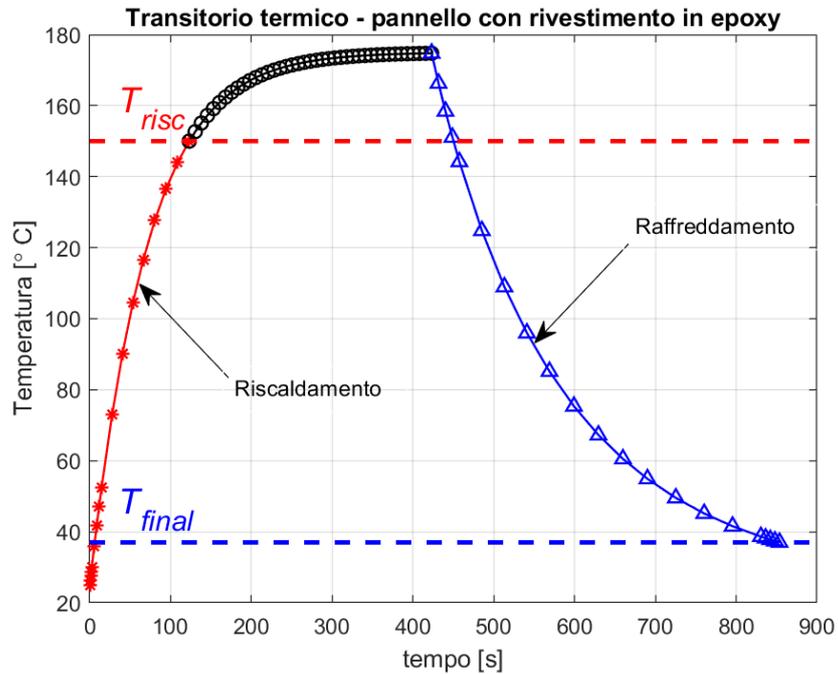


Figura 8: Andamento della temperatura del pannello in funzione del tempo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, D. P. Dewitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th Ed., Wiley, (2011).

A

APPENDICE A

Script MATLAB[®] per soluzione numerica del transitorio termico del ferro da stiro con il metodo dei parametri concentrati.

```

function iron()
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Questo file simula, attraverso il metodo dei parametri      %
% concentrati, il transitorio termico della piastra in        %
5 % alluminio di un ferro da stiro, soggetta a riscaldamento  %
% a flusso costante da un lato, e convezione ed             %
% irraggiamento dall'altro.                                 %
% Si desidera valutare il tempo necessario per raggiungere    %
% la temperatura di esercizio tp = 135 °C.                  %
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Esercizio no. 5.11 di "Fundamentals of Heat and Mass        %
% Transfer", T.L. Bergman, A.S. Lavine, F.P. Incropera,      %
% D.P. Dewitt, 7th Edition, Wiley, 2011.                    %
%                                                            %
15 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% E. Nobile, 16.04.2007                                     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
tspan      = [0 900]; % Intervallo (arbitrario, dato che non
20 % conosco la durata dell'evento) di
% integrazione temporale [s]
% ----- Condizioni iniziali ----- %
T0         = 20;      % Temperatura iniziale piastra [°C]
% ----- Temperatura a regime ----- %
25 Tp        = 135;    % Temperatura piastra a regime [°C]
% ----- Materiale piastra ----- %
rho        = 2800;    % Massa volumica (densità) [kg/m^3]
c          = 900;     % Calore specifico [J/kg K]
% ----- Spessore piastra ----- %
30 L         = 7e-3;  % Spessore piastra ferro da stiro [m]
% ----- Irraggiamento ----- %
emiss      = 0.8;     % Emissività della piastra
sigma      = 5.67e-8; % Cost. di Stefan-Boltzmann [W/m^2 k^4]
% ----- Convezione ----- %
35 h         = 10;    % Coefficiente convettivo [W/m^2 K]
% ----- Flusso imposto ----- %
q          = 12500;   % Flusso sul lato riscaldato [W/m^2]
% ----- Condizioni ambientali ----- %
40 Tinf      = 20;    % Temperatura aria ambiente [°C]
Tamb       = 18;     % Temperatura superfici ambiente [°C]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Setta l'evento: raggiungimento della temperatura Tp
%
45 options = odeset('Events',@events);
%
% Integrazione temporale sino a raggiungere la temperatura Tp
%
[t,y,te,ye] = ode45(@lumped_iron,tspan,T0,options,Tp,rho,c,L,emiss,sigma,...
50 h,q,Tinf,Tamb);
t_final = te; % Tempo finale fornito dall'Event handler
%
% Rappresentazione grafica dell'andamento della temperatura in funzione
% del tempo
55 %
plot(t,y,'bo-','linewidth',1.5);

```

```

grid on;
axis([0 180 0 140]);
title('Transitorio termico - Ferro da stiro');
60 xlabel('tempo [s]');
ylabel('Temperatura [\circ C]');
hold on
%
% Stampa/Display...
65 %
Data=date;
clc;
disp(' ')
disp('----- ')
70 disp(Data)
disp(' ')
disp('----- ')
disp(' Conduzione non stazionaria nella piastra di un')
disp(' Ferro da stiro')
75 disp('(Es. 5.9 di Fundamentals of Heat and Mass Transfer,')
disp('F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, A.S. Lavine')
disp('6th Edition, Wiley, 2007)')
disp('----- ')
disp(' ')
80 disp(strcat('Tempo necessario a raggiungere la temperatura Tp =',...
num2str(Tp),'[°C]'))
disp(strcat(num2str(t_final),'[s]'))
disp(' ')
disp('----- ')
85 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dydt = lumped_iron(t,y,Tp,rho,c,L,emiss,sigma,h,q,Tinf,Tamb)

dydt = [(1/(rho*L*c))*...
90 (q - h*(y(1)-Tinf)-emiss*sigma*((y(1)+273.15)^4-(Tamb+273.15)^4)];

function [value,isterminal,direction] = events(t,y,Tp,rho,c,L,emiss,...
sigma,h,q,Tinf,Tamb)
value = [y(1)-Tp]; % T = Tp: evento
95 isterminal = 1; % Termina il calcolo
direction = +1; % Solo per attraversamenti positivi,
% cioe' T-Tp >0

```