Scambio termico convettivo nei moti interni in condizioni di completo sviluppo termico

- Dall'esistenza di scambio termico convettivo fra la superficie solida ed il fluido discende il fatto che la temperatura del fluido cambia con la distanza *x* (ciò non avviene per la velocità, per la quale $(\partial u / \partial x) = 0$ nella regione di completo sviluppo).
- Infatti, se c'è scambio termico, dT_m/dx, così come $(\partial T / \partial x)$ ad ogni raggio *r*, non sono nulle. Ne segue che il profilo di temperatura *T(r)* cambia continuamente con *x*, e quindi sembrerebbe che una *condizione di completo sviluppo termico* non venga mai raggiunta.
- Questa apparente contraddizione può essere risolta lavorando con un'opportuna *temperatura adimensionale*:

$$\frac{(T_S - T)}{(T_S - T_m)} \qquad (1)$$

Dove T_S è la temperatura superficiale della tubazione, *T* è la temperatura locale del fluido, e T_m è la temperatura media (bulk) del fluido nella sezione.

- Si può dimostrare che, in particolari condizioni, il rapporto definito dalla (1) diviene indipendente da *x*: cioè sebbene il profilo di temperatura *T(r)* cambia con *x*, la forma relativa del profilo non cambia, e si parla in tal caso di *condizioni di completo sviluppo termico*.
- La condizione di completo sviluppo termico può venire espressa dalla:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_S(x) - T(r,x)}{T_S(x) - T_m(x)}\right]_{\text{svil.}} = 0 \qquad (2)$$

- La condizione espressa dalla (2) viene raggiunta sia nel caso in cui il flusso termico *q"* sia costante, che nelle condizioni di temperatura T_S costante;
- Dalla (2) si deduce che, poiché il rapporto delle differenze di temperatura è indipendente da *x*, anche la derivata rispetto a r di tale rapporto è indipendente da *x*: valutando tale derivata in prossimità della parete (si noti peraltro che T_S e T_m sono per definizione indipendenti da *r*) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T_S - T}{T_S - T_m}\right)\Bigg|_{r=r_0} = \frac{-\partial T/\partial r\big|_{r=r_0}}{T_S - T_m} \neq f(x) \qquad (3)$$

Dalla legge di Fourier:

$$q_S'' = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} \qquad (4)$$

e dalla legge di Newton:

$$q_S'' = h\left(T_S - T_m\right) \qquad (5)$$

si ottiene:

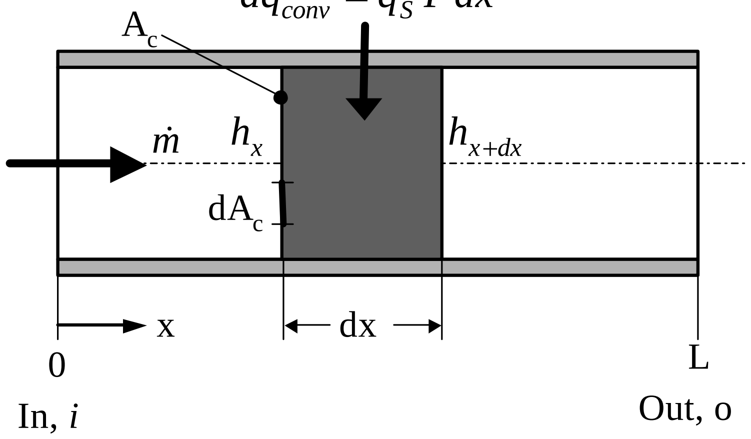
$$\frac{h}{k} \neq f(x) \qquad (6)$$

- Quindi, ***nel flusso interno in condizioni di completo sviluppo termico, per un fluido a proprietà costanti, il coefficiente convettivo (locale) è costante ed indipendente da x.***
- L'equazione (2) non è valida nella regione di ingresso – detta appunto zona di sviluppo termico – dove *h* varia con *x*.
- Da tali risultati, segue che la temperatura media T_m è molto importante nei flussi interni, e per descriverne le variazioni con *x* si utilizza un opportuno bilancio di energia.

Il Bilancio di energia nei flussi interni

– Consideriamo il caso di scambio termico all'interno di una tubazione:

$$dq_{conv} = q_S'' \, P \, dx$$



– Applicando il Primo Principio al volume (elementare) di controllo:

$$dq_{conv} + \dot{m}\, h_x - \dot{m}\, h_{x+dx} = 0 \qquad (7)$$

$$dq_{conv} + \dot{m}\, h_x - \dot{m}\left[h_x + \frac{dh_x}{dx} \cdot dx \right] = 0 \qquad (8)$$

$$dq_{conv} = \dot{m}\, dh_x \qquad (9)$$

Dove h_x rappresenta il valore dell'*entalpia media* nella sezione a distanza *x*, e per un fluido incomprimibile è definita:

$$\dot{m}\, h_x \equiv \int_{A_c} u \; r \; c T \; dA_c \qquad (10)$$

e ricordando la definizione di temperatura media (bulk):

$$\dot{m}\, h_x = \dot{m}\, c\, T_m \qquad (11)$$

Si ha dalla (9):

$$dq_{conv} = \dot{m}\, c\, dT_m \qquad (12)$$

Ed integrando:

$$q_{conv} = \dot{m}\, c \left(T_{m,o} - T_{m,i} \right) \qquad (13)$$

– L'espressione (13) vale qualunque siano le condizioni al contorno sulla superficie della tubazione.

L’equazione (13) può venire scritta, in modo conveniente, osservando che:

$$dq_{conv} = \dot{m}\,c\,dT = q_S''\,P\,dx \qquad (14)$$

dove *P* rappresenta il perimetro della sezione della tubazione ($P = \pi D$ per una tubazione a sezione circolare).

Dalle (5), (12) e (14) si ottiene:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{q_S''\,P}{\dot{m}\,c} = \frac{P}{\dot{m}\,c}\,h\left(T_S - T_m\right) \qquad (15)$$

Dalla (15), che consente di ricavare la variazione di T_m con *x*, si può notare che:

- Se $T_s > T_m$, il fluido si riscalda, mentre si raffredda se $T_s < T_m$;
- Sebbene *P* possa variare con *x* (canali a sezione variabile), nella gran parte dei casi è costante, quindi il rapporto $P/(\dot{m}\,c)$ è costante;
- Nella regione di completo sviluppo (dopo la zona di sviluppo termico), h non varia con *x*;
- Sebbene T_s possa essere costante, T_m varia con *x* (a parte il caso banale di assenza di scambio termico, dove $T_s = T_m$);
- La soluzione della (15), per $T_m(x)$, dipende dalla condizione al contorno sulla superficie: *temperatura costante* o *flusso termico (specifico) costante*.

Superficie con flusso termico costante

In tal caso q_s'' è indipendente da *x*, e quindi, dalla (14):

$$q_{conv} = q_S''\left(P\,L\right) \qquad (16)$$

e si ha che il termine destro della (15) è indipendente da *x*.
Integrando da $x=0$ si ottiene:

$$T_m(x) = T_{m,i} + \frac{q_S''\,P}{\dot{m}\,c}\,x \qquad (17)$$

cioè la temperatura media varia linearmente con *x*.
Si osservi che la (15) può essere utilizzata anche quando q_s'' non è una costante, ma una funzione nota di *x*.

Superficie a temperatura costante

In tal caso T_s è costante – e noto – ed il risultato appena trovato per flusso termico costante non può venire utilizzato.

Definendo $DT = T_s - T_m$, la (15) può esprimersi come:

$$\frac{dT_m}{dx} = -\frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{P}{\dot{m}\,c} h \Delta T \qquad (18)$$

Separando le variabili ed integrando da x=0:

$$\int_{\Delta T_i}^{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\int_0^x \frac{P}{\dot{m}\,c} h\, dx \qquad (19)$$

$$\ln \frac{\Delta T}{\Delta T_i} = -\frac{P\,x}{\dot{m}\,c}\left(\int_0^x \frac{1}{x} h\, dx \right) = -\frac{P\,x}{\dot{m}\,c} \overline{h}_x \qquad (20)$$

dove $\overline{h}_x$, o semplicemente h nel seguito, rappresenta il valore medio del coefficiente convettivo fra *0* ed *x*.

In altra forma:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_i} = \frac{T_S - T_m(x)}{T_S - T_{m,i}} = \exp\left(-\frac{P\,x}{\dot{m}\,c} h \right) \qquad (21)$$

ed in particolare per x = L:

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} = \frac{T_S - T_{m,o}}{T_S - T_{m,i}} = \exp\left(-\frac{P\,L}{\dot{m}\,c} h \right) \qquad (22)$$

cioè la differenza di temperatura $(T_s - T_m)$ decade in modo esponenziale con la distanza lungo l'asse della tubazione.

La determinazione del flusso termico scambiato è complicata dalla natura esponenziale della variazione di temperatura.

Esprimendo la (13) nella forma:

$$q_{conv} = \dot{m}\,c\left[\left(T_S - T_{m,i}\right) - \left(T_S - T_{m,o}\right) \right] = \dot{m}\,c\left(\Delta T_i - \Delta T_o\right) \qquad (23)$$

Sostituendo $(\dot{m}\,c)$ dalla (20), scritta per *x*=*L*:

$$q_{conv} = -\frac{PL}{\ln\dfrac{\Delta T_o}{\Delta T_i}} h\left(\Delta T_i - \Delta T_o\right) = A_S\, h\, \Delta T_{lm} \qquad (24)$$

dove A_s = *(P L)* è l'area di scambio termico della tubazione, e DT_{lm} è la *differenza media logaritmica di temperatura*:

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_o - \Delta T_i}{\ln\left(\Delta T_o / \Delta T_i\right)} \qquad (25)$$

Pertanto la (24) rappresenta la forma della legge di Newton per l'intera tubazione, e DT_{lm} è la forma appropriata della differenza media di temperatura fra superficie e fluido.

La natura logaritmica di tale differenza (in contrasto con la media aritmetica $DT_{ma} = (DT_i + DT_o)/2)$ deriva dall'andamento esponenziale della temperatura media per T_s = cost.

Infine è importante notare che, in numerose applicazioni, è costante – e nota – la temperatura del fluido esterno $T_{¥}$, piuttosto che la temperatura della tubazione.
In tali casi, si possono utilizzare le (22) e (24), sostituendo $T_{¥}$ a T_S, e *U, trasmittanza*, ad *h*, ottenendo:

$$\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} = \frac{T_\infty - T_{m,o}}{T_\infty - T_{m,i}} = \exp\left(-\frac{P\,L}{\dot{m}\,c}U\right) \qquad (26)$$

$$q_{conv} = A_S\, U\, \Delta T_{lm} \qquad (27)$$

La trasmittanza tiene conto, oltre che dei contributi convettivi all'esterno ed all'interno della tubazione, anche del contributo conduttivo per tubazioni di elevato spessore e materiale scarsamente conduttivo.