

Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Ingegneria

a.a. 2022/2023

1 Lo spazio \mathbb{R}^N

Consideriamo l'insieme \mathbb{R}^N , costituito dalle N -uple (x_1, x_2, \dots, x_N) , dove x_1, x_2, \dots, x_N sono numeri reali. Indicheremo i suoi elementi con i simboli

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots$$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in \mathbb{R}^N : dati due elementi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, si definisce $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ in questo modo:

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_N + x'_N).$$

Valgono le seguenti proprietà:

- (associativa) $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{x}'' = \mathbf{x} + (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$;
- esiste un "elemento neutro" $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$: si ha $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$;
- ogni elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ha un "opposto"
 $(-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_N)$: si ha $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}$;
- (commutativa) $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}$.

Pertanto, $(\mathbb{R}^N, +)$ è un "gruppo abeliano". Normalmente, si usa scrivere $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ per indicare $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}')$.

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di \mathbb{R}^N per un numero reale: considerati $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce $\alpha\mathbf{x}$ in questo modo:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_N).$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;
- $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x}) + (\beta\mathbf{x})$;
- $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = (\alpha\mathbf{x}) + (\alpha\mathbf{x}')$;
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Pertanto, con le operazioni introdotte, \mathbb{R}^N è uno “spazio vettoriale”. Chiameremo i suoi elementi “vettori”; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati “scalari”.

È utile introdurre il “prodotto scalare” tra due vettori: dati $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, si definisce il numero reale $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$ in questo modo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \sum_{k=1}^N x_k x'_k.$$

Il prodotto scalare è spesso indicato con simboli diversi, quali ad esempio

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle, \quad (\mathbf{x} | \mathbf{x}'), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$;
- b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- c) $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}'' = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'') + (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')$;
- d) $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')$;
- e) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}$;

Se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0$, si dice che i due vettori \mathbf{x} e \mathbf{x}' sono “ortogonali”.

Definiamo infine, solo nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 , il “prodotto vettoriale” tra due vettori: dati $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, si definisce il vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ in questo modo:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x}' = (x_2 x'_3 - x_3 x'_2, x_3 x'_1 - x_1 x'_3, x_1 x'_2 - x_2 x'_1).$$

Si può verificare che $\mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ è ortogonale sia a \mathbf{x} che a \mathbf{x}' :

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (\mathbf{x} \times \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}' = 0.$$

Inoltre, se $\mathbf{x} \times \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$, siccome

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x_2 x'_3 - x_3 x'_2 & x_3 x'_1 - x_1 x'_3 & x_1 x'_2 - x_2 x'_1 \end{pmatrix} > 0,$$

la direzione di $\mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ è individuata dalla cosiddetta “regola della mano destra”. Ciò significa che la terna $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x} \times \mathbf{x}')$ ha la stessa orientazione di $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, la base canonica

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Elenchiamo alcune proprietà del prodotto vettoriale:

- a) $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \times \mathbf{x}'' = (\mathbf{x} \times \mathbf{x}'') + (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')$;
- b) $(\alpha \mathbf{x}) \times \mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{x}')$;
- c) $\mathbf{x} \times \mathbf{x}' = -\mathbf{x}' \times \mathbf{x}$.

Si può anche dimostrare l’**Identità di Jacobi**

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') + \mathbf{x}' \times (\mathbf{x}'' \times \mathbf{x}) + \mathbf{x}'' \times (\mathbf{x} \times \mathbf{x}') = \mathbf{0}.$$

Si noti infine che

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

1.1 Norma e distanza euclidea in \mathbb{R}^N

A partire dal prodotto scalare, possiamo definire la “norma” di un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
- b) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- c) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$;
- d) $\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|$.

Per dimostrare la d), detta “disuguaglianza triangolare” per la norma, abbiamo bisogno della seguente **disuguaglianza di Schwarz**.

Teorema 1 *Presi due vettori \mathbf{x}, \mathbf{x}' , si ha*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, essendo in tal caso $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0$ e $\|\mathbf{x}'\| = 0$. Supponiamo quindi $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \leq \|\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}'\|^2 = (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}') = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \alpha^2\|\mathbf{x}'\|^2.$$

Prendendo $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$, si ottiene

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - 2\frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 + \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^4}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2\|\mathbf{x}'\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2,$$

da cui la tesi.¹ ■

Dimostriamo ora la proprietà d) della norma, usando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|)^2, \end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza cercata.

¹Lo stesso risultato si ottiene osservando che, se $a\alpha^2 + b\alpha + c \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, allora $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.

Notiamo ancora la seguente **identità del parallelogramma**, di semplice verifica:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2).$$

Definiamo ora, a partire dalla norma, la “distanza euclidea” tra due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (x_k - x'_k)^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq 0$;
- b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}'$;
- c) $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d(\mathbf{x}', \mathbf{x})$;
- d) $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$.

Quest’ultima viene spesso chiamata “disuguaglianza triangolare”; la dimostriamo:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}''\| \\ &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \end{aligned}$$

2 Spazi metrici

Dato un insieme non vuoto E , una funzione $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama “distanza” (su E) se soddisfa alle seguenti proprietà:

- a) $d(x, x') \geq 0$;
- b) $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$;
- c) $d(x, x') = d(x', x)$;
- d) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$

(la disuguaglianza triangolare). L’insieme E , dotato della distanza d , si dice “spazio metrico”. I suoi elementi verranno spesso chiamati “punti”.

Abbiamo visto che \mathbb{R}^N , dotato della distanza euclidea, è uno spazio metrico (nel seguito, parlando dello spazio metrico \mathbb{R}^N , se non altrimenti specificato sottintenderemo che la distanza sia sempre quella euclidea). Nel caso $N = 1$, abbiamo la distanza usuale su \mathbb{R} : $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

È però possibile considerare diverse distanze su uno stesso insieme. Ad esempio, presi due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, la funzione

$$d_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{k=1}^N |x_k - x'_k|$$

rappresenta anch'essa una distanza in \mathbb{R}^N . Lo stesso dicasi per la funzione

$$d_{**}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \max\{|x_k - x'_k| : k = 1, 2, \dots, N\}.$$

Oppure, si può definire la seguente:

$$\hat{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}', \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'. \end{cases}$$

Anche questa è una distanza, per quanto strana possa sembrare.

Dati $x_0 \in E$ e un numero $\rho > 0$, definiamo la palla aperta di centro x_0 e raggio ρ :

$$B(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) < \rho\};$$

analogamente definiamo la palla chiusa

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq \rho\},$$

e la sfera

$$S(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) = \rho\}.$$

In \mathbb{R} , ogni intervallo $]a, b[$ è una palla aperta e ogni intervallo $[a, b]$ è una palla chiusa: si ha

$$]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right), \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Una sfera in \mathbb{R} è quindi costituita da due soli punti.

In \mathbb{R}^2 , con la distanza euclidea, una palla è un cerchio: la palla aperta non comprende i punti della circonferenza esterna, la palla chiusa sì. Una sfera è semplicemente una circonferenza.

Se in \mathbb{R}^2 consideriamo la distanza d_* definita in precedenza, una palla sarà un quadrato, con i lati inclinati di 45 gradi, avente x_0 come punto centrale. Una sfera sarà il perimetro di tale quadrato. Se invece consideriamo la distanza d_{**} , la palla sarà ancora un quadrato, ma con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Se invece prendiamo la distanza \hat{d} , su un qualsiasi insieme E , allora

$$B(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho \leq 1, \\ E & \text{se } \rho > 1, \end{cases} \quad \overline{B}(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho < 1, \\ E & \text{se } \rho \geq 1, \end{cases}$$

per cui

$$S(x_0, \rho) = \begin{cases} E \setminus \{x_0\} & \text{se } \rho = 1, \\ \emptyset & \text{se } \rho \neq 1. \end{cases}$$

Un insieme $U \subseteq E$ si dice “intorno” di un punto x_0 se esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subseteq U$; in tal caso, il punto x_0 si dice “interno” ad U . L'insieme dei punti interni ad U si chiama “l'interno” di U e si denota con $\overset{\circ}{U}$. Chiaramente, si ha sempre $\overset{\circ}{U} \subseteq U$. Si dice che U è un “insieme aperto” se coincide con il suo interno, ossia se $\overset{\circ}{U} = U$.

Teorema 2 *Una palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Sia $B(x_0, \rho)$ la palla in questione; prendiamo un $x_1 \in B(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq \rho - d(x_0, x_1)$, si ha che $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, \rho)$; infatti, se $x \in B(x_1, r)$, allora

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r + d(x_1, x_0) \leq \rho,$$

per cui $x \in B(x_0, \rho)$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto x_1 di $B(x_0, \rho)$ è interno a $B(x_0, \rho)$. ■

Consideriamo ora tre esempi particolari: nel primo, l'insieme U coincide con E ; nel secondo, U è l'insieme vuoto; nel terzo, esso è costituito da un unico punto.

Ogni punto di E è interno all'insieme E stesso, in quanto ogni palla è per definizione contenuta in E . Quindi, l'interno di E coincide con tutto E , ossia $\overset{\circ}{E} = E$. Questo significa che E è un insieme aperto.

L'insieme vuoto non può avere punti interni. Quindi, l'interno di \emptyset , non avendo elementi, è vuoto. In altri termini, $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che \emptyset è anch'esso un insieme aperto.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, in generale non è un insieme aperto (ad esempio in \mathbb{R}^N con la distanza euclidea), ma può esserlo in casi particolari, quando x_0 è un “punto isolato” di E . Ad esempio, se si considera la distanza \hat{d} , oppure in \mathbb{N} , tutti i punti sono isolati.

Teorema 3 *L'interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se $\overset{\circ}{U}$ è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che $\overset{\circ}{U}$ sia non vuoto. Sia $x_1 \in \overset{\circ}{U}$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_1, \rho) \subseteq U$. Se proviamo che $B(x_1, \rho) \subseteq \overset{\circ}{U}$ la dimostrazione sarà completa, in quanto avremo dimostrato che ogni punto x_1 di $\overset{\circ}{U}$ è interno a $\overset{\circ}{U}$.

Per dimostrare che $B(x_1, \rho) \subseteq \overset{\circ}{U}$, sia x un elemento di $B(x_1, \rho)$. Siccome $B(x_1, \rho)$ è un insieme aperto, esiste un $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$. Allora $B(x, r) \subseteq U$, per cui x appartiene a $\overset{\circ}{U}$. La dimostrazione è completa. ■

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{U}_1 \subseteq \overset{\circ}{U}_2.$$

Da essa segue che $\overset{\circ}{U}$ è il più grande insieme aperto contenuto in U : se A è un aperto e $A \subseteq U$, allora $A \subseteq \overset{\circ}{U}$.

Diremo che il punto x_0 è “aderente” all'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$. L'insieme dei punti aderenti ad U si chiama “la chiusura” di U e si denota con \overline{U} . Chiaramente, si ha sempre $U \subseteq \overline{U}$. Si dice che U è un “insieme chiuso” se coincide con la sua chiusura, ossia se $U = \overline{U}$.

Teorema 4 *Una palla chiusa è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $U = \overline{B}(x_0, \rho)$ la palla in questione; voglio dimostrare che $\overline{U} \subseteq U$. A tal fine vedremo che $\mathcal{C}U \subseteq \mathcal{C}\overline{U}$.² Prendiamo un $x_1 \in \mathcal{C}U$, ossia $x_1 \notin \overline{B}(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq d(x_0, x_1) - \rho$, si ha che $B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \emptyset$; infatti, se per assurdo esistesse un $x \in B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho)$, allora si avrebbe

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x) + d(x, x_1) < \rho + r,$$

in contrasto con la scelta fatta per r . Quindi, $x_1 \notin \overline{U}$, ossia $x_1 \in \mathcal{C}\overline{U}$. ■

Essendo E il l'insieme universo, ogni punto aderente ad E deve comunque appartenere ad E stesso. Quindi, la chiusura di E coincide con E , ossia $\overline{E} = E$. Questo significa che E è un insieme chiuso.

Notiamo che non esiste alcun punto aderente all'insieme \emptyset . Infatti, qualsiasi sia il punto x_0 , per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap \emptyset = \emptyset$. Quindi, la chiusura di \emptyset , non avendo elementi, è vuota. In altri termini, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che \emptyset è un insieme chiuso.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un $x_1 \notin U$, scegliendo $\rho > 0$ tale che $\rho < d(x_0, x_1)$ si ha che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$, per cui x_1 non è aderente ad U .

Teorema 5 *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Poniamo $V = \overline{U}$. Se $V = E$, la tesi è verificata. Supponiamo quindi che sia $V \neq E$. Sia $x_1 \notin V$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$. Vediamo che anche $B(x_1, \rho) \cap V = \emptyset$. Infatti, se per assurdo ci fosse un $x \in B(x_1, \rho) \cap V$, essendo $B(x_1, \rho)$ un insieme aperto, esisterebbe un $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$. Siccome $x \in V = \overline{U}$, dovrebbe essere $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$ e quindi anche $B(x_1, \rho) \cap U \neq \emptyset$, in contraddizione con quanto sopra. Quindi, nessun punto x_1 al di fuori di V può essere aderente a V . In altri termini, V contiene tutti i punti ad esso aderenti, pertanto è chiuso. ■

Si può dimostrare che

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2.$$

Da questa implicazione segue che \overline{U} è il più piccolo insieme chiuso che contiene U : se C è un chiuso e $C \supseteq U$, allora $C \supseteq \overline{U}$.

Si può dimostrare che l'unione e l'intersezione di due insiemi aperti [chiusi] sono insiemi aperti [chiusi]. Lo stesso vale per un numero finito di insiemi aperti [chiusi]: lo si dimostra per induzione. Se invece si considera un numero infinito di insiemi, la cosa cambia. L'unione di un numero infinito di insiemi

²Denotiamo con $\mathcal{C}U$ il complementare di U in E , ossia l'insieme $E \setminus U$.

aperti è un insieme aperto, l'intersezione in generale non lo è. Ad esempio, in \mathbb{R} , prendendo gli aperti

$$A_n = \left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro intersezione è $\{0\}$, che non è un aperto. Analogamente, l'intersezione di un numero infinito di insiemi chiusi è un insieme chiuso, mentre l'unione in generale non lo è. Ad esempio, considerando i chiusi

$$C_n = \left[-1 + \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1} \right] ,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro unione è l'intervallo $] -1, 1[$, che non è un chiuso.

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

Teorema 6 *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\overset{\circ}{U}, \quad (\mathcal{C}U) = \overline{\mathcal{C}U}.$$

Dimostrazione. Vediamo la prima uguaglianza. Se $U = E$, allora $\mathcal{C}U = \emptyset$, per cui $\overline{\mathcal{C}U} = \emptyset$; d'altra parte, $\overset{\circ}{U} = E$, per cui $\mathcal{C}\overset{\circ}{U} = \emptyset$. L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia $U \neq E$, per cui $\mathcal{C}U \neq \emptyset$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{C}U} &\Leftrightarrow \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \cap \mathcal{C}U \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \not\subseteq U \\ &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{U} \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{C}\overset{\circ}{U}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurre la seguente:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}\overset{\circ}{U}) = \overline{\mathcal{C}(\mathcal{C}U)} = \overline{U}.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ■

Abbiamo quindi che

$$\overline{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\overset{\circ}{U}), \quad \overset{\circ}{U} = \mathcal{C}(\overline{U}).$$

Come immediato corollario, abbiamo il seguente.

Teorema 7 *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

Dimostrazione. Se U è aperto, $U = \overset{\circ}{U}$ e quindi

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\overset{\circ}{U} = \mathcal{C}U,$$

per cui $\mathcal{C}U$ è chiuso.

Se U è chiuso, $U = \overline{U}$ e quindi

$$(\overset{\circ}{CU}) = \overline{CU} = CU,$$

per cui CU è aperto. ■

Nota. Nel seguito, qualora non specificato altrimenti, quando parleremo di \mathbb{R}^N come spazio metrico sarà sempre sottinteso che la distanza e la norma su di esso considerate siano quelle euclidee.

3 Funzioni continue

Siano E ed F due spazi metrici, con le loro distanze d_E e d_F , rispettivamente. Sia x_0 un punto di E e $f : E \rightarrow F$ una funzione.

Definizione 1 Diremo che f è “continua” in x_0 se, comunque preso un numero positivo ε , è possibile trovare un numero positivo δ tale che, se x è un qualsiasi elemento del dominio E che dista da x_0 per meno di δ , allora $f(x)$ dista da $f(x_0)$ per meno di ε . In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

In questa formulazione, spesso la scrittura “ $\forall x \in E$ ” verrà sottintesa.

Osserviamo che una o entrambe le disuguaglianze

$$d_E(x, x_0) < \delta, \quad d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

possono essere sostituite rispettivamente da

$$d_E(x, x_0) \leq \delta, \quad d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$

ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che ε è un *qualunque* numero positivo e, dall’altro lato, che se l’implicazione della definizione vale per un certo numero positivo δ , essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel δ un qualsiasi numero positivo più piccolo.

Una rilettura della definizione di continuità ci mostra che f è continua in x_0 se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Inoltre, è del tutto equivalente considerare una palla chiusa al posto di una palla aperta; risulta inoltre utile la seguente formulazione equivalente, per cui f è continua in x_0 se e solo se:

per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

Nel caso in cui la funzione f sia continua in ogni punto x_0 del dominio E , diremo che “ f è continua su E ”, o semplicemente “ f è continua”.

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 1. La funzione costante: per un certo $\bar{c} \in F$, si ha che $f(x) = \bar{c}$, per ogni $x \in E$. Essendo $d_F(f(x), f(x_0)) = d_F(\bar{c}, \bar{c}) = 0$ per ogni $x \in E$, tale funzione è chiaramente continua (ogni scelta di $\delta > 0$ va bene).

Esempio 2. Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}^N$. Fissato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$. Vediamo che è continua. Infatti, se $\alpha = 0$, si tratta della funzione costante con valore $\mathbf{0}$, e sappiamo che tale funzione è continua. Sia ora $\alpha \neq 0$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, essendo

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|\alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}_0\| = \|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = |\alpha| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|,$$

basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ per avere l'implicazione

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Esempio 3. Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}$. Vediamo che la funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ è continua su \mathbb{R}^N . Questo seguirà facilmente dalla disuguaglianza

$$\left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}'\| \right| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

che ora dimostriamo. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|, \\ \|\mathbf{x}'\| &= \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Essendo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$, si ha che

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}'\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

da cui la disuguaglianza cercata. A questo punto, considerato un $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e fissato un $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$ per avere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\| \right| < \varepsilon.$$

I tre teoremi seguenti hanno dimostrazione analoga a quella vista nel corso di Analisi 1, in cui si supponeva che E fosse un sottoinsieme di \mathbb{R} .

Teorema 8 *Se $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in x_0 e $\alpha \in \mathbb{R}$, anche αf , $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sono continue in x_0 .*

Teorema 9 (della permanenza del segno) *Sia $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 . Se $g(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 per cui $g(x) > 0$ per ogni $x \in U$. Se invece $g(x_0) < 0$, allora esiste un intorno U di x_0 per cui $g(x) < 0$ per ogni $x \in U$.*

Teorema 10 Se $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 .

Vediamo ora come si comporta una funzione composta di due funzioni continue.

Teorema 11 Siano E, F, G tre spazi metrici, $f : E \rightarrow F$ continua in x_0 e $g : F \rightarrow G$ continua in $f(x_0)$; allora $g \circ f$ è continua in x_0 .

Dimostrazione. Fissato un intorno W di $[g \circ f](x_0) = g(f(x_0))$, per la continuità di g in $f(x_0)$ esiste un intorno V di $f(x_0)$ tale che $g(V) \subseteq W$. Allora, per la continuità di f in x_0 , esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$. Ne segue che $[g \circ f](U) \subseteq W$. ■

Consideriamo ora, per ogni $k = 1, 2, \dots, D$, la funzione “ k -esima proiezione” $p_k : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_D) = x_k.$$

Teorema 12 Le funzioni p_k sono continue.

Dimostrazione. Consideriamo un punto $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_D^0) \in \mathbb{R}^D$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Notiamo che, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$, si ha

$$|x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^D (x_j - x_j^0)^2} = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

per cui, prendendo $\delta = \varepsilon$, si ha:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow |p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon,$$

il che dimostra che p_k è continua in \mathbf{x}_0 . ■

Supponiamo ora $f : E \rightarrow \mathbb{R}^M$. Consideriamo le “componenti” della funzione f definite da $f_k = p_k \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$, con $k = 1, 2, \dots, M$, per cui si ha

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)).$$

Teorema 13 La funzione f è continua in x_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Dimostrazione. Se f è continua in x_0 , lo sono anche le f_k in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di f siano tutte continue in x_0 . Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k = 1, 2, \dots, M$ esiste un $\delta_k > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon.$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^M (f_j(x) - f_j(x_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon,$$

il che, per l'arbitrarietà di ε , completa la dimostrazione. ■

Teorema 14 Ogni applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ è continua.

Dimostrazione. Osserviamo che, essendo le proiezioni p_k lineari, le componenti $\ell_k = p_k \circ \ell$ dell'applicazione lineare ℓ sono anch'esse lineari. Consideriamo la base canonica $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N]$ di \mathbb{R}^N , con

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_N &= (0, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si può scrivere come

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_N \mathbf{e}_N = p_1(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + p_2(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 + \dots + p_N(\mathbf{x}) \mathbf{e}_N.$$

Quindi, per ogni $k \in \{1, 2, \dots, M\}$,

$$\ell_k(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) \ell_k(\mathbf{e}_1) + p_2(\mathbf{x}) \ell_k(\mathbf{e}_2) + \dots + p_N(\mathbf{x}) \ell_k(\mathbf{e}_N),$$

per cui ℓ_k risulta essere combinazione lineare delle proiezioni p_1, p_2, \dots, p_N . Essendo queste ultime continue, anche ℓ_k è continua. Avendo tutte le componenti continue, ℓ è pertanto continua. ■

4 La nozione di limite

Consideriamo due spazi metrici E, F , un punto x_0 di E e una funzione

$$f : E \rightarrow F, \quad \text{oppure} \quad f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F,$$

non necessariamente definita in x_0 . Supporremo inoltre che x_0 sia un “punto di accumulazione” di E : ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E .

Definizione 2 Si dice che $l \in F$ è il “limite di f in x_0 ”, o anche “limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 ” e si scrive

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$\forall V, \text{ intorno di } l \quad \exists U, \text{ intorno di } x_0 : f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Talvolta si scrive anche $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$.

Per cominciare, verifichiamo l'unicità del limite.

Teorema 15 *Se esiste, il limite di f in x_0 è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi, l e l' . Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}d(l, l')$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon,$$

ed esiste un $\delta' > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta' \Rightarrow d(f(x), l') < \varepsilon.$$

Sia $x \neq x_0$ tale che $d(x, x_0) < \delta$ e $d(x, x_0) < \delta'$ (tale x esiste perché x_0 è di accumulazione). Allora

$$d(l', l) \leq d(l, f(x)) + d(f(x), l') < 2\varepsilon = d(l', l),$$

una contraddizione. ■

I seguenti due teoremi evidenziano il legame stretto che intercorre tra i concetti di limite e di continuità.

Teorema 16 *Si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se e solo se la funzione $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0

Teorema 17 *Considerata la funzione $f : E \rightarrow F$, definita anche in x_0 , si ha che*

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Iniziamo a vedere le proprietà dei limiti che vengono direttamente ereditate dalle funzioni continue. Nei teoremi seguenti, con relativo corollario, le funzioni f e g sono definite su E o su $E \setminus \{x_0\}$, indifferentemente.

Teorema 18 (della permanenza del segno) *Sia $g : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

Analogamente, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) < 0.$$

Corollario 1 Se $g(x) \leq 0$ per ogni x in un intorno di x_0 , allora, qualora il limite esista, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0.$$

Analogamente, se $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0 , allora, qualora il limite esista, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq 0.$$

Vediamo ora come si comporta il limite nei confronti delle operazioni in \mathbb{R} .

Teorema 19 Siano $f, g : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = l_1 l_2;$$

inoltre, se $l_2 \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Consideriamo ora una funzione composta $g \circ f$. Abbiamo due possibili situazioni.

Teorema 20 Sia $f : E \rightarrow F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Se $g : F \rightarrow G$ è continua in l , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l).$$

In altri termini,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right).$$

Dimostrazione. Ricordo che la funzione $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0 e g è continua in $l = \tilde{f}(x_0)$. Pertanto, $g \circ \tilde{f}$ è continua in x_0 , da cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(l).$$

■

Teorema 21 Sia $f : E \rightarrow F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Supponiamo che l sia un punto di accumulazione di F e che la funzione

$$g : F \rightarrow G, \quad \text{oppure} \quad g : F \setminus \{l\} \rightarrow G,$$

non necessariamente definita in l , sia tale che

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = L.$$

Se $f(x) \neq l$ per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la funzione $\tilde{f} : E \rightarrow F$, continua in x_0 con $\tilde{f}(x_0) = l$. Analogamente, consideriamo la funzione $\tilde{g} : F \rightarrow G$ così definita:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq l, \\ L & \text{se } y = l. \end{cases}$$

Essa è continua in l con $\tilde{g}(l) = L$. Consideriamo la funzione composta $\tilde{g} \circ \tilde{f}$, che per quanto sopra è continua in x_0 con $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{g}(l) = L$. Essendo $f(x) \neq l$ per ogni x , si ha che, per $x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)),$$

e pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = L. \quad \blacksquare$$

Nota. La conclusione del teorema precedente si riassume con la formula

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{\substack{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}} g(y).$$

Spesso si dice che si è operato il “cambio di variabile $y = f(x)$ ”. Riguardando inoltre le ipotesi dello stesso teorema, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia $f(x) \neq l$ per gli x tali che $0 < d(x, x_0) < \delta$. Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo “locale”. Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

Esempio. Sia ora $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(z) = z \sin(1/z)$. Il Teorema 21 qui può essere applicato per concludere che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = \lim_{\substack{z \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)}} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0.$$

Siamo infine interessati a studiare il limite di una funzione $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$, dove x_0 è un punto di accumulazione di uno spazio metrico E . Consideriamo le sue componenti $f_k : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ di f , con $k = 1, 2, \dots, M$, per cui si ha:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)).$$

Teorema 22 *Il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$ esiste se e solo se esistono i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$, per ogni $k = 1, 2, \dots, M$. In tal caso, si ha $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$. Vale quindi la formula*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_M(x) \right).$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema sulla continuità delle componenti di una funzione continua. ■

Finora abbiamo considerato due spazi metrici E, F , un punto x_0 di accumulazione per E e una funzione $f : E \rightarrow F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$. Siccome l'eventuale valore di f in x_0 è ininfluenza ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonché del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$.

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \rightarrow F$, con $\widehat{E} \subseteq E$, purché x_0 sia di accumulazione per \widehat{E} : ogni intorno di x_0 deve contenere infiniti punti di \widehat{E} .

Sia ora $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$, e sia $\widehat{E} \subseteq E$. Possiamo considerare la restrizione di f a $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$: è la funzione $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ i cui valori coincidono con quelli di f : si ha $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$. Talvolta si scrive $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$.

Teorema 23 *Se esiste il limite di f in x_0 e x_0 è di accumulazione anche per \widehat{E} , allora esiste anche il limite di \hat{f} in x_0 e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di \hat{f} . ■

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione f : a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

Esempio 1. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, come si vede considerando le restrizioni alle due rette $\{(x, y) : x = 0\}$ e $\{(x, y) : x = y\}$.

Esempio 2. Più sorprendente è la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$$

per la quale le restrizioni a tutte le rette passanti per $(0, 0)$ hanno limite 0, ma la restrizione alla parabola $\{(x, y) : y = x^2\}$ vale costantemente $\frac{1}{2}$.

Esempio 3. Dimostriamo invece che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Dopo aver verificato che

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2),$$

risulta naturale prendere $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, per avere che

$$d((x, y), (0, 0)) < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora il caso in cui E è uno spazio metrico qualunque ed $F = \mathbb{R}$. Risulterà talvolta utile il seguente “teorema dei due carabinieri”.

Teorema 24 *Supponiamo di avere due funzioni f_1, f_2 per cui*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l.$$

Se $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che, per ogni x ,

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} 0 < d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon, \\ 0 < d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \varepsilon,$$

il che dimostra la tesi. ■

5 La retta ampliata

Consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$, definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Possiamo definire una nuova distanza su \mathbb{R} :

$$\tilde{d}(x, x') = |\varphi(x) - \varphi(x')|.$$

Si può vedere che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme $\tilde{\mathbb{R}}$, definito come unione di \mathbb{R} e di due nuovi elementi, che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

L'insieme $\tilde{\mathbb{R}}$ risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty.$$

Consideriamo la funzione $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$, definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty, \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{se } x = +\infty. \end{cases}$$

Definiamo, per $x, x' \in \tilde{\mathbb{R}}$,

$$\tilde{d}(x, x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')|.$$

Si verifica facilmente che \tilde{d} è una distanza su $\tilde{\mathbb{R}}$. In questo modo, $\tilde{\mathbb{R}}$ risulta uno spazio metrico.

Si può verificare che un intorno di $+\infty$ è un insieme che contiene, oltre al punto $+\infty$, un intervallo del tipo $]\alpha, +\infty[$, per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente, un intorno di $-\infty$ è un insieme che contiene, oltre a $-\infty$, un intervallo del tipo $]-\infty, \beta[$, per un certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, sia $E \subseteq \mathbb{R}$, F uno spazio metrico e $f : E \rightarrow F$ una funzione. Considerando E come sottoinsieme di $\tilde{\mathbb{R}}$, si ha che $+\infty$ è punto di accumulazione per E se e solo se E non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } l \quad \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ f(U \cap E) \subseteq V$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon.$$

Analogamente, se E non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = l.$$

Vediamo ora il caso in cui E sia uno spazio metrico ed $F = \mathbb{R}$, considerato come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per E e consideriamo una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, o $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ &f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty.$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \quad \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha' \Rightarrow f(x) > \alpha; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Se invece $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \Rightarrow f(x) > \alpha;$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \beta' \in \mathbb{R} : \quad x < \beta' \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Vediamo ad esempio il caso di una successione $(a_n)_n$ in uno spazio metrico F . Abbiamo quindi una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow F$ definita da $f(n) = a_n$. Considerando \mathbb{N} come sottoinsieme di $\widehat{\mathbb{R}}$, si vede che l'unico punto di accumulazione è $+\infty$. Adattando la definizione di limite a questo caso, possiamo scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_n, l) < \varepsilon.$$

Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con $\lim_n a_n$, sottintendendo che $n \rightarrow +\infty$.

Teorema 25 *La funzione f è continua in x_0 se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in E , si ha*

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = f(x_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0 , e sia $(a_n)_n$ una successione in E tale che $\lim_n a_n = x_0$. Per il Teorema 20 sul limite di una funzione composta,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n) = f(x_0),$$

cosicchè una delle due implicazioni è dimostrata.

Ragioniamo ora per contrapposizione, e supponiamo che f non sia continua in x_0 . Questo significa che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste almeno un $x \in E$ per cui $d(x, x_0) < \delta$ e $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste pertanto un a_n in E tale che $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n+1}$ e $d(f(a_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Ne segue che $\lim_n a_n = x_0$, ma sicuramente non può essere che $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$. ■

Consideriamo ora il caso in cui x_0 sia un punto di accumulazione e $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ una funzione. Come immediata conseguenza del teorema precedente, otteniamo il seguente

Corollario 2 *Avremo che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in $E \setminus \{x_0\}$, si ha

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = l.$$

Sia ora U un sottoinsieme dello spazio metrico E . Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a U facendo uso delle successioni.

Teorema 26 *Un punto $x \in E$ è aderente a U se e solo se esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$.*

Dimostrazione. Se x è aderente a U , allora l'intersezione $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap U$ è non vuota, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo a_n . In questo modo, ho costruito una successione $(a_n)_n$ in U , ed è facile vedere che essa ha limite x . Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Allora, fissato $\rho > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_n, x) < \rho,$$

ossia $a_n \in B(x, \rho)$. Quindi, $B(x, \rho) \cap U$ è non vuoto, e questo dimostra che x è aderente a U . ■

6 Insiemi compatti

Data che sia una successione $(a_n)_n$, una sua “sottosuccessione” si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici $(n_k)_k$ e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}.$$

Teorema 27 *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici n_k in \mathbb{N} , dalla $n_{k+1} > n_k$ si deduce che $n_{k+1} \geq n_k + 1$ e, per induzione, che $n_k \geq k$, per ogni k . Ne segue che $\lim_k n_k = +\infty$. Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

In uno spazio metrico E , diremo che un sottoinsieme U è “compatto” se ogni successione $(a_n)_n$ in U possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U . Il Teorema di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se $E = \mathbb{R}$, gli intervalli del tipo $U = [a, b]$ sono compatti.

Teorema 28 *Ogni insieme compatto di uno spazio metrico E è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sia U un insieme compatto. Preso un $x \in \bar{U}$, esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U . Ma, essendo una sottosuccessione, deve essere $\lim_k a_{n_k} = x$, per cui $x \in U$. Quindi, ogni punto aderente di U appartiene ad U , per cui U è chiuso.

Fissiamo ora un $x_0 \in U$ qualsiasi e dimostriamo che, se $n \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, allora $U \subseteq B(x_0, n)$. Per assurdo, se così non fosse, potrei trovare una successione $(a_n)_n$ in U tale che $d(a_n, x_0) \geq n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma, essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un certo limite $\bar{x} \in U$. Usando la disuguaglianza triangolare, si ha che

$$|d(a_{n_k}, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \leq d(a_{n_k}, \bar{x}),$$

da cui segue che $\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = d(\bar{x}, x_0)$, mentre dovrebbe essere

$$\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = +\infty,$$

una contraddizione. Pertanto, U deve essere limitato. ■

Ora vorremmo focalizzare la nostra attenzione sui sottoinsiemi compatti di \mathbb{R}^M .

Teorema 29 *Un sottoinsieme \mathbb{R}^M è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sappiamo già che ogni compatto è chiuso e limitato. Supponiamo ora che U sia un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^M . Supporremo per semplicità $M = 2$. Allora U è contenuto in un rettangolo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Sia $(\mathbf{a}_n)_n$ una successione in U . Si ha $\mathbf{a}_n = (a_n^1, a_n^2)$, con $a_n^1 \in [a_1, b_1]$ e $a_n^2 \in [a_2, b_2]$. Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k}^1)_k$ che ha un limite $l_1 \in [a_1, b_1]$. Consideriamo la sottosuccessione $(a_{n_k}^2)_k$, con gli stessi indici di quella appena trovata. Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a_{n_{k_j}}^2)_j$ che ha un limite $l_2 \in [a_2, b_2]$. Osservando che

$$d(\mathbf{a}_{n_{k_j}}, (l_1, l_2)) = \sqrt{(a_{n_{k_j}}^1 - l_1)^2 + (a_{n_{k_j}}^2 - l_2)^2},$$

se ne deduce che

$$\lim_j \mathbf{a}_{n_{k_j}} = (l_1, l_2).$$

Il punto $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ è aderente ad U . Essendo U chiuso, \mathbf{l} appartiene ad U . ■

Nel seguito, diremo che una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è “limitata superiormente” (o “limitata inferiormente”) se lo è la sua immagine $f(U)$. Diremo che f è “limitata” se è sia limitata superiormente che inferiormente. Diremo che “ f ha massimo” (o “ f ha minimo”) se $f(U)$ ce l’ha. Nel caso in cui f abbia massimo, chiameremo “punto di massimo” ogni \bar{x} per cui $f(\bar{x}) = \max f(U)$; analoga definizione per “punto di minimo”.

Teorema 30 (di Weierstrass) *Se U è un insieme compatto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $s = \sup f(U)$. Dimosteremo che esiste un punto di massimo, ossia un $\bar{x} \in U$ tale che $f(\bar{x}) = s$.

Notiamo che è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in $f(U)$ tale che $\lim_n y_n = s$: se $s \in \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ possiamo trovare un $y_n \in f(U)$ per cui $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$; se invece $s = +\infty$, per ogni n esiste un $y_n \in f(U)$ tale che $y_n > n$.

In corrispondenza, possiamo trovare una successione $(x_n)_n$ in U tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Siccome $\lim_n y_n = s$ e $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, la sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ ha anch’essa limite s . Allora, per la continuità di f ,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l’esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua $g = -f$ e si usa il fatto che g ha massimo). ■

7 Calcolo differenziale: funzioni da \mathbb{R}^N a \mathbb{R}

In questa sezione, E sarà un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N , \mathbf{x}_0 un punto di E e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Vogliamo estendere il concetto di derivata già introdotto nel caso $N = 1$. Iniziamo con il fissare una “direzione”, ossia un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ tale che $\|\mathbf{v}\| = 1$ (detto anche “versore”). Chiamiamo, se esiste, “derivata direzionale” di f in \mathbf{x}_0 nella direzione \mathbf{v} il seguente limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t},$$

che verrà indicato con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0).$$

Se \mathbf{v} coincide con un elemento \mathbf{e}_k della base canonica $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N]$ di \mathbb{R}^N , la derivata direzionale si chiamerà “derivata parziale” k -esima di f in \mathbf{x}_0 e si indicherà con

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0).$$

Se $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$, si ha quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + t, \dots, x_N^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_N^0)}{t}, \end{aligned}$$

per cui si usa parlare di “derivata rispetto alla k -esima variabile”.

Esistono delle funzioni che, pur avendo derivate direzionali in tutte le possibili direzioni, non sono continue. Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali nulle in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, ma non è continua in tale punto, come si vede considerando la restrizione alla parabola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Questo fatto ci porta a cercare una generalizzazione più appropriata del concetto di derivata.

Definizione 3 Diremo che la funzione f è “differenziabile” in \mathbf{x}_0 se esiste una applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ per cui si possa scrivere

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \ell(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x}),$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Se f è differenziabile in \mathbf{x}_0 , l'applicazione lineare ℓ si chiama “differenziale” di f in \mathbf{x}_0 e si indica con il simbolo

$$df(\mathbf{x}_0).$$

Teorema 31 Se f è differenziabile in \mathbf{x}_0 , allora f è continua in \mathbf{x}_0 .

Dimostrazione. Sappiamo che l'applicazione $\ell = df(\mathbf{x}_0)$, essendo lineare, è continua e $\ell(\mathbf{0}) = 0$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}_0) + \ell(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x})] \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \ell(\mathbf{0}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} r(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &= f(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

il che dimostra che f è continua in \mathbf{x}_0 . ■

Seguendo un'abitudine consolidata per le applicazioni lineari, si usa spesso scrivere $df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ invece di $df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$.

Teorema 32 Se f è differenziabile in \mathbf{x}_0 , allora esistono tutte le derivate direzionali di f in \mathbf{x}_0 : per ogni direzione $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}.$$

Dimostrazione. Usando la definizione di differenziale, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{v}) + r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} + r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{t} \\ &= df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{t}; \end{aligned}$$

d'altra parte, essendo $\|\mathbf{v}\| = 1$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|}{\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{x}_0\|} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|r(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

da cui la tesi. ■

In particolare, se \mathbf{v} coincide con un elemento \mathbf{e}_k della base canonica $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N]$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_k.$$

Scrivendo il vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ come $\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + \cdots + h_N\mathbf{e}_N$, abbiamo

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} &= h_1df(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_1 + h_2df(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_2 + \cdots + h_Ndf(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_N \\ &= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \cdots + h_N\frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

ossia

$$df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)h_k.$$

Introducendo il vettore “gradiente” di f in \mathbf{x}_0

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \right),$$

si può scrivere

$$df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x}),$$

con

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Analizziamo con maggiore attenzione il caso $N = 2$. Come di consueto, invece di usare la notazione (x_1, x_2) , gli elementi di \mathbb{R}^2 verranno denotati con (x, y) . Fissato quindi il punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, possiamo scrivere

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + r(x, y),$$

con

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{r(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Ricordando che il grafico di f è l'insieme

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\},$$

chiameremo “piano tangente” al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ l'insieme

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right\}.$$

8 Funzioni di classe \mathcal{C}^1

Il seguente risultato è noto come “teorema del differenziale totale”.

Teorema 33 *Se f possiede le derivate parziali in un intorno di \mathbf{x}_0 ed esse sono continue in \mathbf{x}_0 , allora f è differenziabile in \mathbf{x}_0 .*

Dimostrazione. Supporremo per semplicità di notazioni $N = 2$. Definiamo l'applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni vettore $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ associa

$$\ell(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)h_2.$$

Vedremo che ℓ è proprio il differenziale di f in \mathbf{x}_0 . Intanto, è lineare, come si vede immediatamente. Inoltre, scrivendo $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, per il Teorema di Lagrange si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= (f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)) + (f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2)(x_2 - x_2^0), \end{aligned}$$

per un certo $\xi_1 \in [x_1^0, x_1]$ e un certo $\xi_2 \in [x_2^0, x_2]$. Quindi,

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \ell(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right] (x_1 - x_1^0) + \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right] (x_2 - x_2^0), \end{aligned}$$

ed essendo $|x_1 - x_1^0| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ e $|x_2 - x_2^0| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$,

$$\frac{|r(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right|.$$

Facendo tendere \mathbf{x} a \mathbf{x}_0 , si ha che $(\xi_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ e $(x_1^0, \xi_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ per cui, essendo $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ continue in $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|r(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

da cui la tesi. ■

Diremo che la funzione f è di classe \mathcal{C}^1 su E se f possiede le derivate parziali ed esse sono continue su tutto E . Dal teorema precedente segue che una funzione di classe \mathcal{C}^1 è “differenziabile su E ”, ossia in ogni punto di E .

9 Derivate parziali successive

Supponiamo, per semplicità, $N = 2$. Consideriamo E , un insieme aperto di \mathbb{R}^2 e una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ in tutti i punti di E . Se esse posseggono a loro volta derivate parziali in un punto \mathbf{x}_0 , queste si dicono “derivate parziali seconde” della f in \mathbf{x}_0 e si denotano con i simboli

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0).\end{aligned}$$

Teorema 34 (di Schwarz) *Se esistono le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ in un intorno di \mathbf{x}_0 ed esse sono continue in \mathbf{x}_0 , allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0).$$

Dimostrazione. Sia $\rho > 0$ tale che $B(\mathbf{x}_0, \rho) \subseteq E$. Scriviamo $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ e prendiamo un $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$ tale che $x_1 \neq x_1^0$ e $x_2 \neq x_2^0$. Possiamo allora definire

$$g(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0}, \quad h(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0}.$$

Si verifica che vale l'uguaglianza

$$\frac{g(x_1, x_2) - g(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0} = \frac{h(x_1, x_2) - h(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0}.$$

Per il Teorema di Lagrange, esiste un $\xi_1 \in]x_1^0, x_1[$ tale che

$$\frac{g(x_1, x_2) - g(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0},$$

ed esiste un $\xi_2 \in]x_2^0, x_2[$ tale che

$$\frac{h(x_1, x_2) - h(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0} = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2)}{x_1 - x_1^0}.$$

Di nuovo per il Teorema di Lagrange, esiste un $\eta_2 \in]x_2^0, x_2[$ tale che

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \eta_2),$$

ed esiste un $\eta_1 \in]x_1^0, x_1[$ tale che

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, \xi_2)}{x_1 - x_1^0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1, \xi_2).$$

Quindi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \eta_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1, \xi_2).$$

Facendo tendere $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, si ha che sia (ξ_1, η_2) che (η_1, ξ_2) tendono a \mathbf{x}_0 , e per la continuità delle derivate seconde miste si ha la tesi. ■

Diremo che la funzione f è di classe \mathcal{C}^2 su E se f possiede tutte le derivate parziali seconde ed esse sono continue su tutto E . Dal teorema precedente segue che se una funzione di classe \mathcal{C}^2 , le derivate parziali “miste” sono uguali.

È utile definire la “matrice hessiana” di f nel punto \mathbf{x}_0 :

$$Hf(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix};$$

se f è di classe \mathcal{C}^2 , si tratta di una matrice simmetrica.

Quanto sopra si può estendere senza difficoltà alle funzioni di N variabili, con N qualunque. Se f è di classe \mathcal{C}^2 , la matrice hessiana risulta allora una matrice simmetrica del tipo $N \times N$:

$$Hf(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Procedendo per induzione, si possono definire le derivate parziali n -esime di una funzione. Si dice che la funzione f è di classe \mathcal{C}^n su E se f possiede tutte le derivate parziali n -esime ed esse sono continue su tutto E .

10 La formula di Taylor

Supponiamo ora che $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione di classe \mathcal{C}^{n+1} , per un certo $n \geq 1$.

Consideriamo come sopra, per semplicità, il caso $N = 2$. Introduciamo le seguenti notazioni:

$$D_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$D_{x_1}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad D_{x_1} D_{x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad D_{x_2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

e così via, per le derivate parziali successive. Si noti che, per un vettore $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = h_1 D_{x_1} f(\mathbf{x}_0) + h_2 D_{x_2} f(\mathbf{x}_0),$$

che risulterà conveniente scrivere

$$df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]f(\mathbf{x}_0).$$

In questo modo, possiamo pensare che f viene trasformata dall'operatore $[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]$ nella nuova funzione $[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]f = h_1 D_{x_1} f + h_2 D_{x_2} f$.

Dati due punti \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} in \mathbb{R}^N , si definisce il “segmento” che li congiunge:

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\};$$

analogamente, scriveremo

$$] \mathbf{x}_0, \mathbf{x} [= \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in]0, 1[\}.$$

Supponiamo ora che $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ sia un segmento contenuto in E e consideriamo la funzione $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\phi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).$$

Dimostriamo che ϕ è derivabile $n + 1$ volte su $[0, 1]$. Per $t \in [0, 1]$, essendo f differenziabile in $\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, si ha

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}_0) + df(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + r(\mathbf{u}),$$

con

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{r(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|} = 0.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} \frac{\phi(s) - \phi(t)}{s - t} &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{s - t} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))((s - t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + r(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{s - t} \\ &= df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \lim_{s \rightarrow t} \frac{r(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{s - t}, \end{aligned}$$

ed essendo

$$\lim_{s \rightarrow t} \left| \frac{r(\mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{s - t} \right| = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \frac{|r(\mathbf{u})|}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = 0,$$

si ha

$$\phi'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\phi(s) - \phi(t)}{s - t} = df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Con le nuove notazioni, ponendo $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{h} = (h_1, h_2)$, abbiamo

$$\phi'(t) = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = g(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

dove g è la nuova funzione $[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]f$. Possiamo allora iterare il procedimento, e calcolare la derivata seconda di ϕ :

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]g(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \\ &= [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}][h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).\end{aligned}$$

Per brevità, scriveremo

$$\phi''(t) = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^2 f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).$$

Notiamo che, usando la linearità delle derivate parziali e l'uguaglianza delle derivate miste (Teorema di Schwarz), si ha

$$\begin{aligned}[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^2 f &= h_1^2 D_{x_1}^2 f + 2h_1 h_2 D_{x_1} D_{x_2} f + h_2^2 D_{x_2}^2 f \\ &= [h_1^2 D_{x_1}^2 + 2h_1 h_2 D_{x_1} D_{x_2} + h_2^2 D_{x_2}^2]f.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'espressione

$$[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^2 = [h_1^2 D_{x_1}^2 + 2h_1 h_2 D_{x_1} D_{x_2} + h_2^2 D_{x_2}^2]$$

si ottiene formalmente come il quadrato di un binomio. Procedendo in questo modo, si può dimostrare per induzione che, per $k = 1, 2, \dots, n + 1$, la formula della derivata k -esima di ϕ è

$$\phi^{(k)}(t) = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^k f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)),$$

e che, usando formalmente la formula del binomio di Newton

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_1^{k-j} a_2^j,$$

si ha

$$[h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^k = \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} h_1^{k-j} h_2^j D_{x_1}^{k-j} D_{x_2}^j \right]$$

(in questa formula, i simboli $D_{x_1}^0$ e $D_{x_2}^0$ vanno interpretati come l'operatore identità).

Per poter scrivere agevolmente la formula di Taylor, introduciamo la notazione

$$d^k f(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}^k = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2}]^k f(\mathbf{x}_0).$$

Teorema 35 Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^{n+1} e $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ un segmento contenuto in E . Allora esiste un $\boldsymbol{\xi} \in]\mathbf{x}_0, \mathbf{x}[$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = p_n(\mathbf{x}) + r_n(\mathbf{x}),$$

dove

$$p_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!}d^2f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n$$

è il “polinomio di Taylor di grado n associato alla funzione f nel punto \mathbf{x}_0 ” e

$$r_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{n+1}$$

è il “resto di Lagrange”.

Dimostrazione. Per la formula di Taylor applicata alla funzione ϕ , si ha

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\xi)t^{n+1},$$

per un certo $\xi \in]0, t[$. La formula cercata si ottiene prendendo $t = 1$ e sostituendo i valori delle derivate di ϕ trovati sopra. ■

Il polinomio di Taylor si può anche scrivere nella forma compatta

$$p_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}d^k f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^k,$$

con la convenzione che $d^0 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^0$, il primo addendo della somma, sia $f(\mathbf{x}_0)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} p_n(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} [(x_1 - x_1^0)D_{x_1} + (x_2 - x_2^0)D_{x_2}]^k f(\mathbf{x}_0) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-j} \partial x_2^j}(\mathbf{x}_0) (x_1 - x_1^0)^{k-j} (x_2 - x_2^0)^j \right). \end{aligned}$$

Può essere utile la seguente espressione per il polinomio di secondo grado:

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \left(Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Il teorema sopra dimostrato resta valido per qualsiasi dimensione N , pur di interpretare correttamente le notazioni: ad esempio, per un vettore $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, si dovrà leggere

$$d^k f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}^k = [h_1 D_{x_1} + h_2 D_{x_2} + \cdots + h_N D_{x_N}]^k f(\mathbf{x}_0).$$

In questo caso, volendo esplicitare il polinomio di Taylor, sarà utile utilizzare la formula di Leibniz

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_N)^k = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_N=k} \frac{k!}{m_1! m_2! \cdots m_N!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_N^{m_N}.$$

11 La ricerca di massimi e minimi

Come sopra, consideriamo un insieme aperto $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $\mathbf{x}_0 \in E$ è un “punto di massimo locale” per la funzione f se esiste un intorno U di x_0 contenuto in E per cui x_0 è punto di massimo della restrizione di f a U . Equivalentemente, se

$$\exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in E \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0).$$

Analogamente per “punto di minimo locale”.

Teorema 36 (di Fermat) *Se \mathbf{x}_0 è un punto di massimo o di minimo locale e f è differenziabile in \mathbf{x}_0 , allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.*

Dimostrazione. Se \mathbf{x}_0 è punto di massimo locale, per ogni direzione $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ avremo che

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se } t < 0, \\ \leq 0 & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Siccome f è differenziabile in \mathbf{x}_0 , ne deduciamo che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = 0.$$

In particolare, sono nulle tutte le derivate parziali, per cui $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$. Nel caso in cui \mathbf{x}_0 sia un punto di minimo locale, si procede in modo analogo. ■

Un punto il cui il gradiente si annulli è detto “punto stazionario”. Naturalmente un tale punto potrebbe non essere nè di massimo nè di minimo.

Mostriamo ora come la formula di Taylor possa essere usata per stabilire un criterio affinché un punto stazionario sia di massimo, o di minimo. Iniziamo con una definizione. Diremo che una matrice \mathbb{A} simmetrica $N \times N$ è *definita positiva* se

$$[\mathbb{A}\mathbf{h}] \cdot \mathbf{h} > 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Diremo che \mathbb{A} è *definita negativa* se vale la disuguaglianza opposta, ossia se $-\mathbb{A}$ è definita positiva.

Teorema 37 *Se \mathbf{x}_0 è un punto stazionario e f è di classe \mathcal{C}^2 , con matrice hessiana $Hf(\mathbf{x}_0)$ definita positiva, allora \mathbf{x}_0 è un punto di minimo locale. Se invece $Hf(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa, allora \mathbf{x}_0 è un punto di massimo locale.*

Dimostrazione. Per la formula di Taylor, per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ in un intorno di \mathbf{x}_0 esiste un $\boldsymbol{\xi} \in]\mathbf{x}_0, \mathbf{x}[$ per cui

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \left(Hf(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Se $\mathbb{A} = Hf(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva, esiste un $c > 0$ tale che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ con $\|\mathbf{v}\| = 1$,

$$[\mathbb{A}\mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} \geq c.$$

(Abbiamo qui usato il Teorema di Weierstrass, e il fatto che la sfera $\{v \in \mathbb{R}^N : \|v\| = 1\}$ è un insieme compatto.) Quindi

$$\left(Hf(\mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \geq c.$$

Per la continuità delle derivate seconde, se \mathbf{x} è sufficientemente vicino a \mathbf{x}_0 ,

$$\left(Hf(\boldsymbol{\xi}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \geq \frac{1}{2}c > 0.$$

(Lo si vede per assurdo, usando di nuovo la compattezza della sfera.) Essendo $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, per tali \mathbf{x} abbiamo che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \left(Hf(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\geq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}c\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 > f(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

per cui \mathbf{x}_0 è un punto di minimo locale.

La dimostrazione della seconda affermazione è analoga. ■

Enunciamo ora (senza dimostrazione) due criteri utili a stabilire quando una matrice \mathbb{A} simmetrica $N \times N$ è definita positiva o negativa. Ricordiamo che gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti reali.

Primo criterio. *La matrice \mathbb{A} è definita positiva se tutti i suoi autovalori sono positivi. Essa è definita negativa se tutti i suoi autovalori sono negativi.*

Secondo criterio. *La matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{ij}$ è definita positiva se*

$$\begin{aligned} a_{11} &> 0, \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &> 0, \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &> 0, \dots \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} &> 0. \end{aligned}$$

Essa è definita negativa se i determinanti scritti sopra hanno segno alternato: quelli delle sottomatrici con un numero dispari di righe e di colonne sono negativi, mentre quelli delle sottomatrici con un numero pari di righe e di colonne sono positivi.

12 Il differenziale di una funzione a valori vettoriali

Sia E un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N , \mathbf{x}_0 un punto di E e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^M$ una funzione.

Definizione 4 Diremo che la funzione f è “differenziabile” in \mathbf{x}_0 se esiste una applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ per cui si possa scrivere

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \ell(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x}),$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}.$$

Se f è differenziabile in \mathbf{x}_0 , l'applicazione lineare ℓ si chiama “differenziale” di f in \mathbf{x}_0 e si indica con il simbolo

$$df(\mathbf{x}_0).$$

Siano f_1, f_2, \dots, f_M le componenti di f , per cui

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})).$$

Teorema 38 La funzione f è differenziabile in \mathbf{x}_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti. In tal caso, per ogni vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = (df_1(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}, df_2(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}, \dots, df_M(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}).$$

Dimostrazione. Considerando le componenti nell'equazione

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \ell(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r(\mathbf{x}),$$

possiamo scrivere

$$f_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}_0) + \ell_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r_k(\mathbf{x}),$$

con $k = 1, 2, \dots, M$, e sappiamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r_k(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0 \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, M,$$

da cui la tesi. ■

Il teorema precedente permette di ricondurre lo studio del differenziale di una funzione a valori vettoriali a quello delle sue componenti, che sono funzioni a valori scalari.

È utile considerare la matrice associata all'applicazione lineare $\ell = df(\mathbf{x}_0)$, data da

$$\begin{pmatrix} \ell_1(\mathbf{e}_1) & \ell_1(\mathbf{e}_2) & \dots & \ell_1(\mathbf{e}_N) \\ \ell_2(\mathbf{e}_1) & \ell_2(\mathbf{e}_2) & \dots & \ell_2(\mathbf{e}_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_M(\mathbf{e}_1) & \ell_M(\mathbf{e}_2) & \dots & \ell_M(\mathbf{e}_N) \end{pmatrix},$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ sono i vettori della base canonica di \mathbb{R}^N . Tale matrice si chiama "matrice jacobiana" associata alla funzione f nel punto \mathbf{x}_0 e si denota con $Jf(\mathbf{x}_0)$. Ricordando che

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = df_k(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_j,$$

con $k = 1, 2, \dots, M$ e $j = 1, 2, \dots, N$, si ottiene la matrice

$$Jf(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Studiamo ora la differenziabilità di una funzione composta.

Teorema 39 *Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}^M$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 , E' è un aperto di \mathbb{R}^M contenente $f(E)$ e $g : E' \rightarrow \mathbb{R}^L$ è differenziabile in $f(\mathbf{x}_0)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 , e si ha*

$$d(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0).$$

Dimostrazione. Ponendo $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$, si ha

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r_1(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}_0) + dg(\mathbf{y}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + r_2(\mathbf{y}),$$

con

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{r_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}, \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \frac{r_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|} = \mathbf{0}.$$

Introduciamo la funzione $R_2 : E' \rightarrow \mathbb{R}^L$ così definita:

$$R_2(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{r_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|} & \text{se } \mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{y} = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

Si noti che R_2 è continua in \mathbf{y}_0 . Allora

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{x})) &= g(f(\mathbf{x}_0)) + dg(f(\mathbf{x}_0))[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)] + r_2(f(\mathbf{x})) \\ &= g(f(\mathbf{x}_0)) + dg(f(\mathbf{x}_0))[df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r_1(\mathbf{x})] + r_2(f(\mathbf{x})) \\ &= g(f(\mathbf{x}_0)) + [dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r_3(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} r_3(\mathbf{x}) &= dg(f(\mathbf{x}_0))(r_1(\mathbf{x})) + r_2(f(\mathbf{x})) \\ &= dg(f(\mathbf{x}_0))(r_1(\mathbf{x})) + \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| R_2(f(\mathbf{x})) \\ &= dg(f(\mathbf{x}_0))(r_1(\mathbf{x})) + \|df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + r_1(\mathbf{x})\| R_2(f(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{\|r_3(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} &\leq \left\| dg(f(\mathbf{x}_0)) \left(\frac{r_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \right\| + \\ &\quad + \left(\left\| df(\mathbf{x}_0) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \right\| + \frac{\|r_1(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \|R_2(f(\mathbf{x}))\|. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, il primo addendo tende a 0, poiché $dg(f(\mathbf{x}_0))$ è continua; f è continua in \mathbf{x}_0 e R_2 è continua in $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ con $R_2(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, per cui $\|R_2(f(\mathbf{x}))\|$ tende a 0; $df(\mathbf{x}_0)$, essendo continua, è limitata sull'insieme compatto $\bar{B}(\mathbf{0}, 1)$. Quindi, si ha che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|r_3(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Ne segue che $g \circ f$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 con differenziale $dg(f(\mathbf{x}_0)) \circ df(\mathbf{x}_0)$. ■

Come noto, la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle due matrici corrispondenti. Dal teorema precedente abbiamo quindi la seguente formula per le matrici jacobiane:

$$J(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = Jg(f(\mathbf{x}_0)) \cdot Jf(\mathbf{x}_0),$$

ossia

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial(g \circ f)_L}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial(g \circ f)_L}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_M}(f(\mathbf{x}_0)) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_L}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) & \cdots & \frac{\partial g_L}{\partial y_M}(f(\mathbf{x}_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ne segue la formula per le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) &= \\ &= \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_M}(f(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial f_M}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \\ &= \sum_{k=1}^M \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

dove $i = 1, 2, \dots, L$ e $j = 1, 2, \dots, N$.

13 Il teorema della funzione implicita - primo enunciato

Il seguente risultato porta il nome di Ulisse Dini.

Teorema 40 Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un aperto, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 e (x_0, y_0) un punto di Ω per cui si abbia:

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno aperto U di x_0 , un intorno aperto V di y_0 e una funzione $\eta : U \rightarrow V$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $U \times V \subseteq \Omega$ e, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \eta(x).$$

Inoltre, la funzione η è di classe \mathcal{C}^1 e vale la formula

$$\eta'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \eta(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \eta(x))}.$$

La funzione η risulta definita “implicitamente” dall’equazione $g(x, y) = 0$; il suo grafico è l’insieme

$$Gr(\eta) = \{(x, y) \in U \times V : g(x, y) = 0\}.$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Per la proprietà di permanenza del segno, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $|x - x_0| \leq \delta$ e $|y - y_0| \leq \delta$, allora $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) > 0$. Quindi, per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, la funzione $g(x, \cdot)$ è strettamente crescente su $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Essendo $g(x_0, y_0) = 0$, avremo che

$$g(x_0, y_0 - \delta) < 0 < g(x_0, y_0 + \delta).$$

Per la permanenza del segno, esiste un $\delta' > 0$ tale che, se $x \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, allora

$$g(x, y_0 - \delta) < 0 < g(x, y_0 + \delta).$$

Definiamo $U =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$ e $V =]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$. Quindi, per ogni $x \in U$, siccome $g(x, \cdot)$ è strettamente crescente, esiste uno ed un solo $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ per cui $g(x, y) = 0$; chiamo $\eta(x)$ tale y . Resta così definita una funzione $\eta : U \rightarrow V$ tale che, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \eta(x).$$

Per vedere che η è continua, fissiamo ora un $\bar{x} \in U$ e dimostriamo la continuità in \bar{x} . Preso un $x \in U$ e considerata la funzione $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma(t) = (\bar{x} + t(x - \bar{x}), \eta(\bar{x}) + t(\eta(x) - \eta(\bar{x}))),$$

applicando il Teorema di Lagrange alla funzione $g \circ \gamma$ si ha che esiste un $\xi \in]0, 1[$ per cui

$$g(x, \eta(x)) - g(\bar{x}, \eta(\bar{x})) = \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))(x - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))(\eta(x) - \eta(\bar{x})).$$

Essendo $g(x, \eta(x)) = g(\bar{x}, \eta(\bar{x})) = 0$, si ha che

$$|\eta(x) - \eta(\bar{x})| = \left| \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))} \right| |x - \bar{x}|.$$

Siccome le derivate parziali di g sono continue e $\frac{\partial g}{\partial y}$ è non nulla sul compatto $\bar{U} \times \bar{V}$, si ha che $|\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))(\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi)))^{-1}|$ è limitato superiormente e ne segue la continuità di η in \bar{x} . Resta da vedere la derivabilità: procedendo come sopra si ha che

$$\frac{\eta(x) - \eta(\bar{x})}{x - \bar{x}} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))},$$

con $\gamma(\xi)$ appartenente al segmento che congiunge $(\bar{x}, \eta(\bar{x}))$ con $(x, \eta(x))$. Se x tende a \bar{x} , si ha che $\gamma(\xi)$ tende a $(\bar{x}, \eta(\bar{x}))$ e quindi

$$\eta'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\eta(x) - \eta(\bar{x})}{x - \bar{x}} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \eta(\bar{x}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \eta(\bar{x}))}.$$

Ne segue che η è di classe \mathcal{C}^1 . ■

Vale naturalmente anche il seguente enunciato simmetrico rispetto al precedente.

Teorema 41 *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un aperto, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 e (x_0, y_0) un punto di Ω per cui si abbia:*

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno aperto U di x_0 , un intorno aperto V di y_0 e una funzione $\eta : V \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $U \times V \subseteq \Omega$ e, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \eta(y).$$

Inoltre, la funzione η è di classe \mathcal{C}^1 e vale la formula

$$\eta'(y) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(y, \eta(y))}{\frac{\partial g}{\partial x}(y, \eta(y))}.$$

14 Il teorema della funzione implicita - caso generale

Vediamo come si generalizza il teorema della funzione implicita. Considereremo un insieme aperto Ω di $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ e una funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, di classe \mathcal{C}^1 . Quindi, g ha N componenti

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Qui $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Useremo la seguente notazione per le matrici jacobiane:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial x_M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora enunciare il Teorema di Dini in questo caso più generale.

Teorema 42 *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un aperto, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ un punto di Ω per cui si abbia:*

$$g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}, \quad \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno aperto U di \mathbf{x}_0 , un intorno aperto V di \mathbf{y}_0 e una funzione $\eta : U \rightarrow V$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $U \times V \subseteq \Omega$ e, presi $\mathbf{x} \in U$ e $\mathbf{y} \in V$, si ha:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \eta(\mathbf{x}).$$

Inoltre, la funzione η è di classe \mathcal{C}^1 e vale la formula

$$J\eta(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})).$$

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione per induzione su N .

Nel caso $N = 1$ e $M \geq 2$, si procede in modo del tutto analogo a quanto già fatto nel caso $M = 1$. Basterà prendere, al posto dell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, la palla chiusa $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$, e similmente per gli intorni aperti di \mathbf{x}_0 , per dimostrare l'esistenza e la continuità della funzione η . Resta da vedere la derivabilità: considerato $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_M)$, prendiamo ora $\mathbf{x} = (\bar{x}_1 + h, \dots, \bar{x}_M)$; procedendo come in precedenza, si ha che

$$\frac{\eta(\bar{x}_1 + h, \dots, \bar{x}_M) - \eta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_M)}{h} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))},$$

con $\gamma(\xi)$ appartenente al segmento che congiunge $(\bar{\mathbf{x}}, \eta(\bar{\mathbf{x}}))$ con $(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}))$. Se h tende a 0, si ha che $\gamma(\xi)$ tende a $(\bar{\mathbf{x}}, \eta(\bar{\mathbf{x}}))$ e quindi

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(\bar{x}_1 + h, \dots, \bar{x}_M) - \eta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_M)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}, \eta(\bar{\mathbf{x}}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{\mathbf{x}}, \eta(\bar{\mathbf{x}}))}.$$

Analogamente si calcolano le derivate parziali rispetto a x_2, \dots, x_M , per cui si vede che η è di classe \mathcal{C}^1 e

$$J\eta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}))} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})).$$

Supponiamo ora l'enunciato valido fino a $N - 1$, per un certo $N \geq 2$ (e $M \geq 1$ qualsiasi) e dimostriamo che vale anche per N . Useremo la notazione

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = (y_1, \dots, y_{N-1}),$$

per cui scriveremo $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{y}}_1, y_N)$. Siccome

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

almeno uno degli elementi dell'ultima colonna è non nullo. Possiamo supporre senza perdita di generalità, eventualmente permutando le righe, che sia $\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Scrivendo $\mathbf{y}_0 = (\tilde{\mathbf{y}}_1^0, y_N^0)$, con $\tilde{\mathbf{y}}_1^0 = (y_1^0, \dots, y_{N-1}^0)$, sarà

$$g_N(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0, y_N^0) = 0, \quad \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0, y_N^0) \neq 0.$$

Allora (caso unidimensionale) esistono un intorno aperto U_1 di $(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0)$, un intorno aperto V_N di y_N^0 e una funzione $\eta_1 : U_1 \rightarrow V_N$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $U_1 \times V_N \subseteq \Omega$, per cui si abbia: se $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) \in U_1$ e $y_N \in V_N$,

$$g_N(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, y_N) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_N = \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1),$$

e

$$J\eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) = -\frac{1}{\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1))} \frac{\partial g_N}{\partial (\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1)).$$

Possiamo supporre U_1 della forma $\tilde{U} \times \tilde{V}_1$, con \tilde{U} intorno aperto di \mathbf{x}_0 e \tilde{V}_1 intorno aperto di $\tilde{\mathbf{y}}_1^0$. Definiamo la funzione $\phi : \tilde{U} \times \tilde{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$, ponendo

$$\phi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) = (g_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1)), \dots, g_{N-1}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1))).$$

Per brevità, scriveremo

$$g_{(1, \dots, N-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, g_{N-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Notiamo che $\phi(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) = 0$ e che, essendo $\eta_1(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) = y_N^0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) = \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0). \quad (*)$$

Inoltre, siccome $g_N(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1)) = 0$, per ogni $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) \in U_1$, differenziando si ha:

$$0 = \frac{\partial g_N}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0). \quad (**)$$

Scriviamo

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) = \frac{1}{\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)} \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) & \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \hline 0 & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{array} \right),$$

avendo usato la notazione di matrice suddivisa a blocchi. Sostituendo le due uguaglianze (*), (**) e usando le proprietà dei determinanti, si ha:

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) & \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \hline 0 & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{array} \right) = \\ & = \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) & \frac{\partial g_{(1, \dots, N-1)}}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \hline \frac{\partial g_N}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{array} \right) \\ & = \det \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial g}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) \middle| \frac{\partial g}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right) \\ & = \det \left(\frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \middle| \frac{\partial g}{\partial y_N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right) = \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\phi(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) = \mathbf{0}, \quad \det \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0) \neq 0.$$

Per l'ipotesi induttiva, esistono un intorno aperto U di \mathbf{x}_0 , un intorno aperto V_1 di $\tilde{\mathbf{y}}_1^0$ e una funzione $\eta_2 : U \rightarrow V_1$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $U \times V_1 \subseteq \tilde{U} \times \tilde{V}_1$, per cui si abbia: per ogni $\mathbf{x} \in U$ e $\tilde{\mathbf{y}}_1 \in V_1$,

$$\phi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{y}}_1 = \eta_2(\mathbf{x}).$$

In conclusione, per $\mathbf{x} \in U$ e $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{y}}_1, y_N) \in V_1 \times V_2$, si ha:

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} g_{(1, \dots, N-1)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, y_N) = \mathbf{0} \\ g_N(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, y_N) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} g_{(1, \dots, N-1)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1, y_N) = \mathbf{0} \\ y_N = \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \phi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) = \mathbf{0} \\ y_N = \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}_1 = \eta_2(\mathbf{x}) \\ y_N = \eta_1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{y} = (\eta_2(\mathbf{x}), \eta_1(\mathbf{x}, \eta_2(\mathbf{x}))).
\end{aligned}$$

Ponendo $V = V_1 \times V_2$, resta pertanto definita la funzione $\eta : U \rightarrow V$:

$$\eta(\mathbf{x}) = (\eta_2(\mathbf{x}), \eta_1(\mathbf{x}, \eta_2(\mathbf{x}))).$$

Tale funzione è di classe \mathcal{C}^1 , siccome lo sono sia η_1 che η_2 . Siccome $g(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$, se ne deduce che

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x})) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}))J\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

da cui la formula per $J\eta(\mathbf{x})$. ■

Ed ecco l'enunciato simmetrico.

Teorema 43 *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un aperto, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ un punto di Ω per cui si abbia:*

$$g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}, \quad \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno aperto U di \mathbf{x}_0 , un intorno aperto V di \mathbf{y}_0 e una funzione $\eta : V \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^1 tali che $U \times V \subseteq \Omega$ e, presi $\mathbf{x} \in U$ e $\mathbf{y} \in V$, si ha:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \eta(\mathbf{y}).$$

Inoltre, la funzione η è di classe \mathcal{C}^1 e vale la formula

$$J\eta(\mathbf{y}) = - \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}, \eta(\mathbf{y})) \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \eta(\mathbf{y})).$$

Vediamo ora un'importante conseguenza del teorema della funzione implicita.

Definizione 5 *Dati A e B , due aperti di \mathbb{R}^N , una funzione $\varphi : A \rightarrow B$ si è un "diffeomorfismo" se è di classe \mathcal{C}^1 , biiettiva e la sua inversa $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ è anch'essa di classe \mathcal{C}^1 .*

Enunciamo il **teorema di inversione locale**.

Teorema 44 *Siano A e B due aperti di \mathbb{R}^N e $\varphi : A \rightarrow B$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Se per un certo $\mathbf{x}_0 \in A$ si ha che $\det J\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$, allora esistono un intorno aperto U di \mathbf{x}_0 contenuto in A , e un intorno aperto V di $\varphi(\mathbf{x}_0)$ contenuto in B , tali che la restrizione $\varphi|_U : U \rightarrow V$ sia un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{y}.$$

Posto $\mathbf{y}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0)$, si ha che

$$g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}, \quad \text{e} \quad \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \det J\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno aperto V di \mathbf{y}_0 , un intorno aperto U di \mathbf{x}_0 e una funzione $\eta : V \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^1 tali che, presi $\mathbf{y} \in V$ e $\mathbf{x} \in U$, si ha:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \eta(\mathbf{y}).$$

Quindi, $\eta = \varphi|_U^{-1}$ e la dimostrazione è così completa. ■

15 Le M -superfici

Indichiamo con I un rettangolo di \mathbb{R}^M , dove $1 \leq M \leq N$.

Definizione 6 *Chiameremo M -superficie in \mathbb{R}^N una funzione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe \mathcal{C}^1 . Se $M = 1$, σ si dirà anche **curva**; se $M = 2$, si dirà semplicemente **superficie**. L'insieme $\sigma(I)$ è detto **supporto** della M -superficie σ . Diremo che la M -superficie σ è **regolare** se, per ogni $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{I}$, la matrice jacobiana $\sigma'(\mathbf{u})$ ha rango M .*

Consideriamo da vicino il caso $N = 3$. Una curva in \mathbb{R}^3 è una funzione $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La curva è regolare se, per ogni $t \in]a, b[$, il vettore $\sigma'(t) = (\sigma'_1(t), \sigma'_2(t), \sigma'_3(t))$ è non nullo. In tal caso, si definisce il seguente **versore tangente** nel punto $\sigma(t)$:

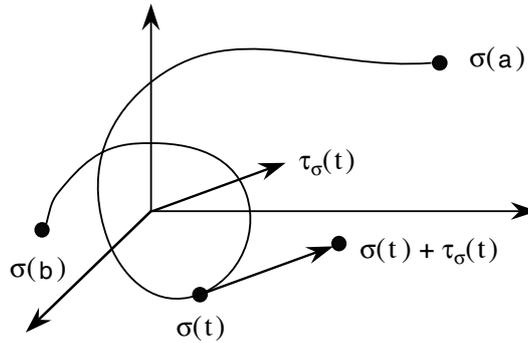
$$\tau_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}.$$

Esempio. La curva $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = (R \cos(2t), R \sin(2t), 0)$$

ha come supporto la circonferenza

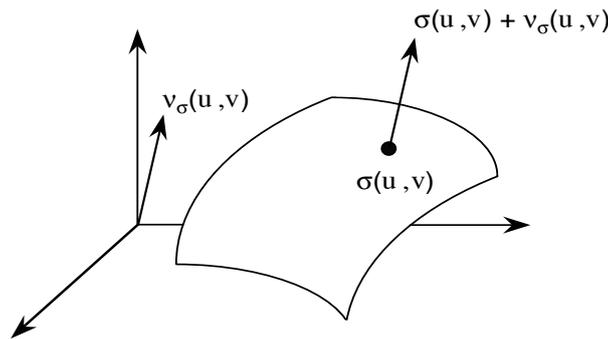
$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$$



(che viene percorsa due volte). Essendo $\sigma'(t) = (-2R \sin(2t), 2R \cos(2t), 0)$, si tratta di una curva regolare, e si ha:

$$\tau_\sigma(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), 0).$$

Una superficie in \mathbb{R}^3 è una funzione $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$. La superficie è regolare se, per ogni $(u, v) \in]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, i vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ sono linearmente indipendenti. In tal caso, essi individuano un piano, detto **piano tangente** alla superficie nel punto $\sigma(u, v)$, e si definisce il seguente **versore normale**:



$$\nu_\sigma(u, v) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|}.$$

Esempi. 1. La superficie $\sigma : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

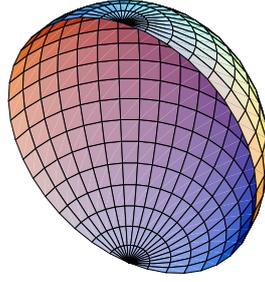
$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

ha come supporto la semisfera

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0\}.$$

Essendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi}(\phi, \theta) &= (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, -R \sin \phi), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\phi, \theta) &= (-R \sin \phi \sin \theta, R \sin \phi \cos \theta, 0), \end{aligned}$$



si tratta di una superficie regolare, e si ha:

$$\nu_\sigma(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

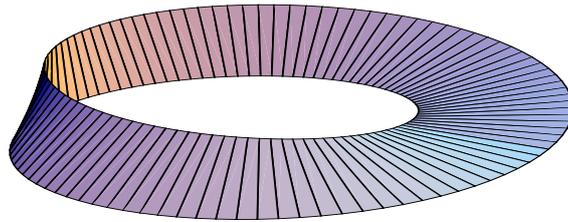
2. La superficie $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $0 \leq r < R$, data da

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0),$$

ha come supporto un cerchio se $r = 0$, una corona circolare se $r > 0$. È una superficie regolare.

3. La superficie $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $0 < r < R$, definita da

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & \left(\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2} \right) \cos \left(\frac{v}{2} \right) \right) \cos v, \right. \\ & \left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2} \right) \cos \left(\frac{v}{2} \right) \right) \sin v, \\ & \left. \left(u - \frac{r+R}{2} \right) \sin \left(\frac{v}{2} \right) \right), \end{aligned}$$



ha come supporto un nastro di Möbius. È anch'essa una superficie regolare.

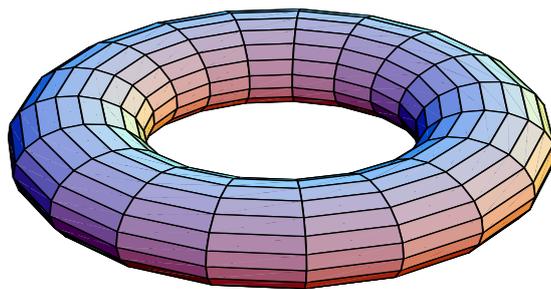
4. La superficie $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

dove $0 < r < R$, ha come supporto l'anello toroidale o "toro"

$$\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Si può verificare che anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.



Una 3-superficie in \mathbb{R}^3 si dice anche **volume**.

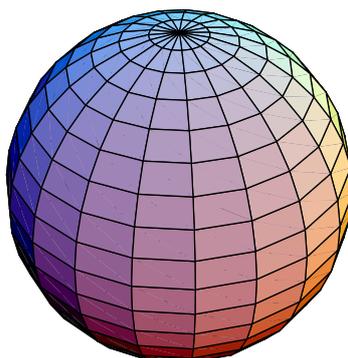
Esempio. La funzione $\sigma : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

ha come supporto la palla chiusa

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

In questo caso, $\det \sigma'(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \sin \phi$ e pertanto si tratta di un volume regolare.



16 Analisi locale delle M -superfici

Sia $1 \leq M < N$. Identificando \mathbb{R}^N con $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M}$, ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ di \mathbb{R}^N si scriverà nella forma $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})$, con $\hat{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_M)$ e $\tilde{\mathbf{x}} = (x_{M+1}, \dots, x_N)$.

Useremo inoltre la seguente notazione: dato $\hat{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M$ e $r > 0$,

$$B[\hat{\mathbf{x}}, r] = [x_1 - r, x_1 + r] \times \cdots \times [x_M - r, x_M + r] \subseteq \mathbb{R}^M.$$

Per semplicità, scriveremo $B[r]$ invece di $B[\mathbf{0}, r]$.

Teorema 45 Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N , \mathbf{x}_0 un punto di Ω e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N-M}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 , tale che

$$g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad e \quad Jg(\mathbf{x}_0) \text{ ha rango } N - M.$$

Allora esistono un intorno U di \mathbf{x}_0 e una M -superficie regolare e iniettiva $\sigma : B[r] \rightarrow \mathbb{R}^N$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$ e

$$\{\mathbf{x} \in U : g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \sigma(B[r]).$$

Dimostrazione. Supponiamo, per esempio, che sia invertibile

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p_{M+1}}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial p_N}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N-M}}{\partial p_{M+1}}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial g_{N-M}}{\partial p_N}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno aperto \hat{U} di $\hat{\mathbf{x}}_0$, un intorno aperto \tilde{U} di $\tilde{\mathbf{x}}_0$ e una funzione $\eta : \hat{U} \rightarrow \tilde{U}$, tali che $\hat{U} \times \tilde{U} \subseteq \Omega$ e, se $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{U}$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}$, si ha:

$$g(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = \eta(\hat{\mathbf{x}}).$$

Preso $r > 0$ tale che $B[\hat{\mathbf{x}}_0, r] \subseteq \hat{U}$, sia $U = B[\hat{\mathbf{x}}_0, r] \times \tilde{U}$ e $\sigma : B[r] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da $\sigma(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} + \hat{\mathbf{x}}_0, \eta(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{x}}_0))$. Si verifica che la matrice jacobiana $J\sigma(\mathbf{u})$ ha come sottomatrice la matrice $M \times M$ identità, per cui σ è regolare. Si vede facilmente che σ è iniettiva, in quanto lo è la prima componente $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + \hat{\mathbf{x}}_0$. Inoltre, se $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) \in U$,

$$g(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = \eta(\hat{\mathbf{x}}) \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sigma(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0),$$

da cui la tesi. Nel caso in cui la sottomatrice considerata non sia invertibile, basterà operare degli scambi nelle colonne della matrice $Jg(\mathbf{x}_0)$ per ricondursi alla situazione precedente. ■

La M -superficie σ individuata dal teorema precedente è detta “ M -parametrizzazione locale”.

Vediamo tre casi di particolare interesse. Iniziamo con una curva in \mathbb{R}^2 (caso $M = 1, N = 2$).

Corollario 3 Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) un punto di Ω e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 , tale che

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0) e una curva regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^2$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0) = (x_0, y_0)$ e

$$\{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\} = \sigma([-r, r]).$$

Vediamo ora il caso di una superficie in \mathbb{R}^3 (caso $M = 2, N = 3$).

Corollario 4 Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^3 , (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 , tale che

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0, z_0) e una superficie regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \times [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^3$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ e

$$\{(x, y, z) \in U : g(x, y, z) = 0\} = \sigma([-r, r] \times [-r, r]).$$

Infine, vediamo il caso di una curva in \mathbb{R}^3 (caso $M = 1, N = 3$).

Corollario 5 Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^3 , (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω e $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe \mathcal{C}^1 , tali che

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0, z_0) e una curva regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^3$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ e

$$\{(x, y, z) \in U : g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\} = \sigma([-r, r]).$$

16.1 I moltiplicatori di Lagrange

Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^N , \mathbf{x}_0 un punto di Ω e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in \mathbf{x}_0 . Vogliamo cercare eventuali punti di massimo o di minimo per la funzione ristretta a un “vincolo”, che sarà descritto da un'altra funzione, in generale a valori vettoriali.

Teorema 46 Sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N-M}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 tale che

$$g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad e \quad Jg(\mathbf{x}_0) \text{ ha rango } N - M.$$

Posto

$$S = \{\mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

se \mathbf{x}_0 è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esistono $(N - M)$ numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-M}$ tali che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{N-M} \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}_0).$$

I numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-M}$ si chiamano **moltiplicatori di Lagrange**.

Dimostrazione. Per il teorema precedente, esistono un intorno U di \mathbf{x}_0 , un $r > 0$ e una M -superficie regolare $\sigma : B[r] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tali che $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$ e

$$S \cap U = \sigma(B[r]).$$

Considerata la funzione $F : B[r] \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $F(\mathbf{u}) = f(\sigma(\mathbf{u}))$, si ha che $\mathbf{0}$ è un punto di minimo o massimo locale per F . Quindi, $\nabla F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, per cui

$$0 = JF(\mathbf{0}) = Jf(\mathbf{x}_0)J\sigma(\mathbf{0}).$$

Ne segue che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \text{ è ortogonale a } \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0}).$$

Inoltre, essendo $g(\sigma(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{u} \in B[r]$, si ha che

$$Jg(\mathbf{x}_0)J\sigma(\mathbf{0}) = 0.$$

Quindi anche i vettori

$$\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_{N-M}(\mathbf{x}_0) \text{ sono tutti ortogonali a } \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0}).$$

Siccome σ è regolare,

$$\text{lo spazio vettoriale } \mathcal{T} \text{ generato da } \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0}) \text{ ha dimensione } M.$$

Quindi lo spazio ortogonale \mathcal{T}^\perp ha dimensione $N - M$. E siccome, come abbiamo visto,

$$\nabla f(\mathbf{x}_0), \nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_{N-M}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{T}^\perp,$$

questi vettori devono essere linearmente dipendenti. Quindi, essendo che i vettori $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_{N-M}(\mathbf{x}_0)$ linearmente indipendenti, ne segue che $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ si deve poter esprimere come una loro combinazione lineare. ■

Vediamo anche qui tre casi particolari interessanti.

Corollario 6 Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) un punto di Ω , $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 tale che

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq 0,$$

e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0) . Posto

$$S = \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\},$$

se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esiste un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Corollario 7 Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^3 , (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω , $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 tale che

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0, z_0) . Posto

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\},$$

se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esiste un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Corollario 8 Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^3 , (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω , $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe \mathcal{C}^1 tali che

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0, z_0) . Posto

$$S = \{(x, y, z) \in U : g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0\},$$

se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esistono due numeri reali λ_1, λ_2 tali che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0).$$

17 Equazioni differenziali - prime definizioni

Le equazioni differenziali sono uno degli strumenti principali utilizzati per modellizzare i fenomeni della Natura, nel senso più ampio del termine. Le troviamo in tutte le Scienze, principalmente nella Fisica, ma anche in ambito economico, biologico, medico, sociale. Esse sono catalogabili in due tipi diversi: le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni differenziali alle derivate parziali. In queste note, tratteremo solo delle prime.

Consideriamo un'espressione del tipo

$$u' = f(t, u), \tag{1}$$

che chiameremo “equazione differenziale in forma canonica”, e iniziamo a spiegarne il significato. Qui f è una funzione continua definita su un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, a valori in \mathbb{R}^N .

Definizione 7 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione di (1) in I ” se:

- I è un intervallo non degenere di \mathbb{R} ,

- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è derivabile su I ,
- $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$.

Ricordiamo che

$$u'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \in \mathbb{R}^N$$

è il “vettore derivata” di u in t .³ Spesso, pensando ai modelli della meccanica, $u(t)$ si può interpretare come “vettore posizione al tempo t ” e $u'(t)$ come “vettore velocità al tempo t ”. Si chiama “orbita” della soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ l’insieme immagine $u(I) = \{u(t) : t \in I\}$, mentre chiameremo “traiettoria” di u il suo grafico $\{(t, u(t)) : t \in I\}$. Lo spazio \mathbb{R}^N si chiama “spazio delle fasi”.

Nelle applicazioni ci si trova spesso ad affrontare la ricerca di una soluzione dell’equazione differenziale che soddisfi una “condizione iniziale” del tipo

$$u(t_0) = u_0.$$

Avendo in mente i modelli della meccanica, si dice che la “posizione” di u “al tempo iniziale” t_0 è u_0 . Ci si trova così a dover risolvere il “problema di Cauchy”

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua, e $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Definizione 8 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione del problema (PC)” se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- u è soluzione di (1) in I ,
- $u(t_0) = u_0$.

Risulta molto utile la seguente formulazione equivalente del problema.

Teorema 47 Una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è soluzione del problema (PC) se e solo se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è continua su I ,
- $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ per ogni $t \in I$.

³Siano $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Se $a \in I$, allora $u'(a)$ sarà un limite destro. Similmente, se $b \in I$, allora $u'(b)$ sarà un limite sinistro.

Ricordiamo a questo proposito che l'integrale di una funzione a valori vettoriali $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t)),$$

è definito da

$$\int_a^b g(t) dt = \left(\int_a^b g_1(t) dt, \dots, \int_a^b g_N(t) dt \right).$$

Esso è quindi un vettore di \mathbb{R}^N .

Dimostrazione del Teorema. Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione. Se u è una soluzione del problema (PC), allora

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

il che dimostra una delle due implicazioni.

Viceversa, se u è una funzione continua per cui si abbia

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

si ha che $u(t_0) = u_0$, e la funzione $s \mapsto f(s, u(s))$ è continua. Quindi u è derivabile, e si ha

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds = f(t, u(t)),$$

per ogni $t \in I$. ■

Spesso le equazioni differenziali coinvolgono anche derivate di ordine più elevato. Un tipico esempio è dato dall'equazione di Newton $F = ma$. In questo caso, se $x(t)$ denota la posizione di un oggetto di massa m al tempo t , l'equazione si può solitamente scrivere come

$$x'' = \frac{1}{m} F(t, x, x').$$

Qui F dipende dal tempo t , dalla posizione x e dalla velocità x' . Definendo $y = x'$, $u = (x, y)$, e $f(t, u) = (y, \frac{1}{m} F(t, x, y))$, l'equazione si può scrivere come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m} F(t, x, y), \end{cases}$$

ossia $u' = f(t, u)$, che ne è la forma canonica (1). Il problema di Cauchy in questo caso avrà una condizione iniziale del tipo $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$.

In generale, un'equazione differenziale “di ordine n ” si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Essa può essere ricondotta alla forma canonica (1), con $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, ponendo

$$u_1 = x, u_2 = x', \dots, u_n = x^{(n-1)}, \quad f(t, u) = (u_2, u_3, \dots, g(t, u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Il corrispondente problema di Cauchy avrà come condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

18 Alcune semplici equazioni

Iniziamo a considerare il caso scalare $N = 1$: in generale, purtroppo, anche in questo caso “semplice”, trovare una soluzione esplicita di un'equazione differenziale può essere un'impresa senza speranza.

Consideriamo dapprima l'equazione differenziale

$$u' = a(t)u + b(t),$$

dove $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue. Si parla in questo caso di “equazione differenziale lineare”. Studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Notiamo che, se u è una soluzione, allora

$$\frac{d}{dt} \left[u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \right] = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} (u'(t) - a(t)u(t)) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t);$$

integrando su $[t_0, t]$,

$$u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} - u_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma,$$

da cui ricaviamo la formula risolutiva

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right).$$

Ad esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u + t^2 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_0^t 3 ds} \int_0^t e^{-\int_0^\sigma 3 ds} \sigma^2 d\sigma \\ &= e^{3t} \int_0^t e^{-3\sigma} \sigma^2 d\sigma \\ &= \frac{2}{27}(e^{3t} - 1) - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t. \end{aligned}$$

Analizziamo ora le “equazioni differenziali a variabili separabili”:

$$u' = e(t)g(u).$$

Qui $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ha come dominio un intervallo J che contiene u_0 , ed $e : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ha come dominio un intervallo \mathcal{I} che contiene t_0 . Supponiamo inoltre $g(u) \neq 0$ per ogni u nell’intervallo J , per cui l’equazione si può scrivere l’equazione nella forma equivalente

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = e(t), \quad u(t) \in J. \quad (2)$$

Come sopra, studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e(t)g(u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Supponendo che $u([t_0, t])$ sia contenuto in J si può integrare (2) su $[t_0, t]$ e, con un cambio di variabile, si ottiene

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^t e(s) ds.$$

Se denotiamo con $\mathcal{P} : J \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di $1/g$, otteniamo

$$\mathcal{P}(u(t)) = \mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds,$$

e siccome \mathcal{P} è strettamente monotona (avendo derivata sempre diversa da zero), possiamo scrivere

$$u(t) = \mathcal{P}^{-1}\left(\mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds\right).$$

Ad esempio, vediamo come trattare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin t (u^2 + 1) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u^2 + 1} = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t,$$

da cui

$$\arctan u(t) = \arctan u_0 + 1 - \cos t,$$

ossia

$$u(t) = \tan \left(\arctan u_0 + 1 - \cos t \right).$$

Si noti che l'espressione è ben definita se t varia in un intorno di 0, ma potrebbe non esserlo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Come secondo esempio, cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1+2t}{\cos u} \\ u(0) = \pi. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{\pi}^{u(t)} \cos u \, du = \int_0^t (1+2s) \, ds = t + t^2,$$

da cui

$$\sin u(t) = t + t^2.$$

Ora bisogna fare attenzione che ci troviamo con $u(t)$ sull'intervallo contenente π dove la funzione \sin è strettamente monotona, cioè in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Definendo $w(t) = u(t) - \pi$, avremo che $w(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\sin w(t) = \sin(u(t) - \pi) = -\sin u(t) = -(t + t^2),$$

per cui $w(t) = \arcsin(-(t + t^2)) = -\arcsin(t + t^2)$, e quindi

$$u(t) = \pi + w(t) = \pi - \arcsin(t + t^2).$$

19 Alcuni modelli che utilizzano le equazioni differenziali

19.1 L'equazione del pendolo

Come primo esempio, analizziamo la ben nota equazione del pendolo matematico

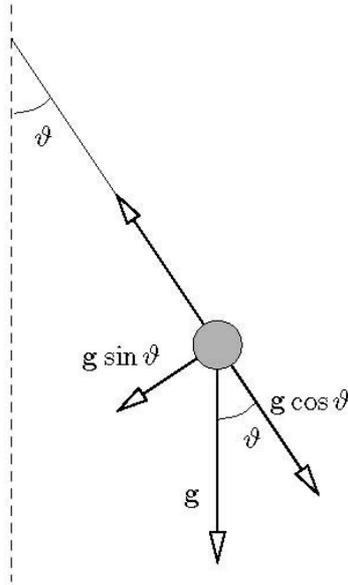
$$\vartheta'' + c\vartheta' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0,$$

dove g è la costante di gravità e ℓ è la lunghezza del pendolo. Qui $c \geq 0$ è un coefficiente di attrito.

Ponendo $a = g/\ell$, passiamo al sistema equivalente nel piano delle fasi

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy - a \sin x. \end{cases}$$

Troviamo facilmente gli equilibri: sono i punti del tipo $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome la funzione seno è 2π -periodica, ci sono due punti di equilibrio geometricamente distinti, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, mentre tutti gli altri si ottengono da questi per 2π -periodicità. L'equilibrio $(\pi, 0)$ non è stabile, mentre l'equilibrio $(0, 0)$ è stabile.



Definiamo la seguente “funzione hamiltoniana”

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - a \cos x.$$

Si noti che il sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a \sin x \end{cases}$$

è del tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

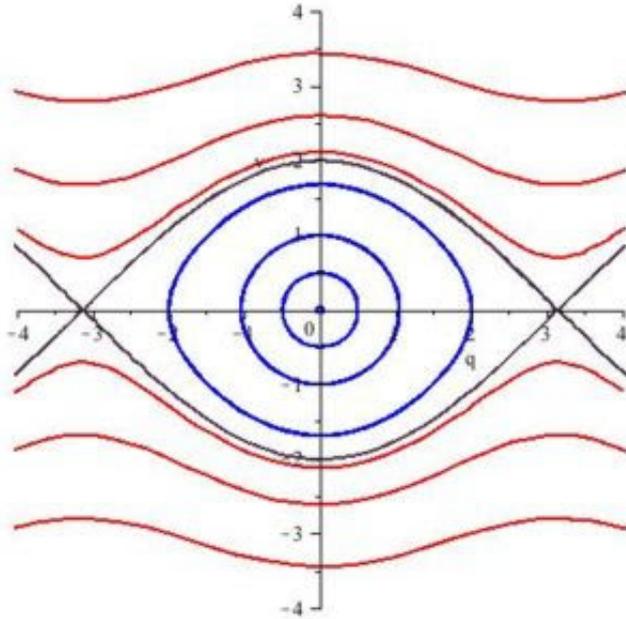
Esso è pertanto un “sistema hamiltoniano”. Per questo tipo di sistemi, se $(x(t), y(t))$ è una qualunque soluzione, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -y'(t)x'(t) + x'(t)y'(t) = 0, \end{aligned}$$

per cui $H(x(t), y(t))$ rimane costante al variare di t . Le orbite delle soluzioni sono pertanto le linee di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = c\},$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante che può assumere svariati valori; esse sono visualizzate in figura. Siccome la funzione coseno è 2π -periodica, le linee di livello della funzione hamiltoniana presentano questo tipo di periodicità nella variabile x .



Il punto di equilibrio $(0, 0)$ è un “centro”: tutte le soluzioni vicine sono periodiche. Esso è pertanto stabile. Se indichiamo con $\tau(\alpha)$ il periodo della soluzione con punto iniziale $x(0) = \alpha$, $y(0) = 0$, si vede che, al variare di α in $]0, \pi[$, il periodo $\tau(\alpha)$ è strettamente crescente, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Il punto di equilibrio $(\pi, 0)$ è una “sella”. Esso è il punto di arrivo asintotico di una soluzione $(x^*(t), y^*(t))$, detta “eteroclina”, per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x^*(t) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \pi, \quad \text{e } y^*(t) > 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

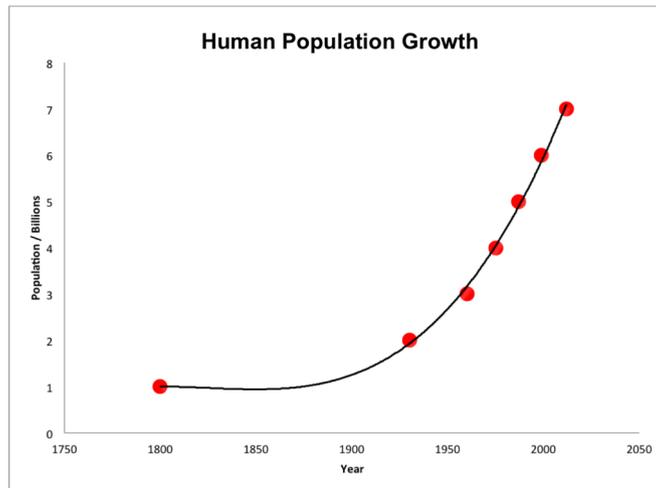
Abbiamo anche la soluzione eteroclina simmetrica $(x_*(t), y_*(t))$, tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_*(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_*(t) = -\pi, \quad \text{e } y_*(t) < 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni la cui orbita attraversa l’asse verticale al di sopra del valore $2\sqrt{a}$ o al di sotto di $-2\sqrt{a}$ non sono periodiche. Esse corrispondono alla situazione fisica in cui il pendolo continua a ruotare in senso antiorario oppure orario, rispettivamente.

19.2 Dinamica delle popolazioni

Vogliamo studiare alcuni modelli di distribuzione di specie (animali o vegetali) in un ecosistema. Cominciamo esaminando la crescita della popolazione umana mondiale negli ultimi due secoli.



Una prima interpretazione, per quanto imprecisa, ci fa pensare a una crescita di tipo esponenziale. Uno dei primi modelli di crescita, proposto da Malthus nel 1798, prevede proprio questo tipo di sviluppo. Esso si basa sulla semplice ipotesi che il tasso di crescita sia proporzionale alla numerosità della popolazione.⁴

Indichiamo con $u(t)$ una misura di densità della numerosità della specie u al tempo t . Per poter trattare più facilmente il problema con i metodi dell'analisi matematica, si suppone che $u(t)$ vari in modo continuo al variare di t . Questa ipotesi potrebbe sembrare strana, visto che il numero di individui è sempre un intero, ma diventa ragionevole se tale numero è molto elevato e i cambiamenti (nascite, morti o migrazioni) avvengono in modo casuale.

Il modello di Malthus è allora esprimibile con l'equazione differenziale

$$u' = \alpha u,$$

che, com'è noto, ha la soluzione

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}.$$

Una crescita di questo tipo si può verificare in laboratorio osservando una coltura di batteri. Questi si riproducono duplicandosi, a intervalli di tempo regolari, pertanto il loro numero segue una legge di tipo esponenziale. A un certo punto, però, la loro quantità tende a stabilizzarsi verso un limite, noto come *capacità portante*. Ecco che un modello più preciso deve tener conto di una competizione intraspecifica, dovuta alle risorse limitate. Nel 1838, Verhulst ha proposto l'equazione differenziale

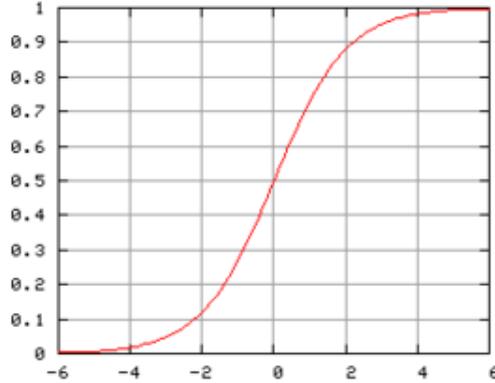
$$u' = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

⁴Questo modello si applica piuttosto bene a diverse situazioni, sia della biologia che di altre discipline.

nota come *equazione logistica*. Essa si può risolvere esplicitamente:

$$u(t) = \frac{Ku_0e^{\alpha t}}{K + u_0(e^{\alpha t} - 1)},$$

e un possibile grafico è rappresentato nella sottostante figura.



19.3 Interazione tra popolazioni

Passiamo ora a discutere un sistema in cui ci sia interazione tra diverse specie. Si possono presentare diverse situazioni: le specie possono essere l'una preda dell'altra, oppure competere per la sopravvivenza, o ancora cooperare, essere in simbiosi. Analizzeremo questi tre casi separatamente supponendo dapprima di avere a che fare con due sole specie. Anche in questa lezione supponiamo che non ci sia dipendenza dalla posizione x .

1. Modello preda-predatore

Il primo modello che presentiamo, forse il più semplice, è quello di Lotka–Volterra per un sistema *preda-predatore*. Indichiamo con $u(t)$ e $v(t)$ la quantità di prede e di predatori, rispettivamente. Il modello è il seguente:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y), \\ y' = y(-\gamma + \delta x). \end{cases}$$

Qui le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono tutte positive. Notiamo che, in assenza di predatori, le prede seguono l'equazione di Malthus $x' = \alpha x$, per cui la loro crescita è di tipo esponenziale. Introducendo i predatori, il fattore di interazione $-\beta xy$ limita la crescita delle prede. Al contrario, in assenza di prede, i predatori seguono l'equazione $y' = -\delta y$, per cui il loro numero decresce esponenzialmente, e sono destinati a estinguersi. Qualora ci siano prede in giro, il fattore δxy ravviva i predatori, che possono così crescere di numero.

Esamineremo ora il sistema preda-predatore, limitandoci allo studio delle soluzioni positive. Si osserva subito che esiste un punto di equilibrio, precisamente

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Uno studio della matrice jacobiana in questo punto ci mostra che gli autovalori hanno parte reale nulla. Per studiarne la stabilità, dobbiamo pertanto usare qualche altro stratagemma.

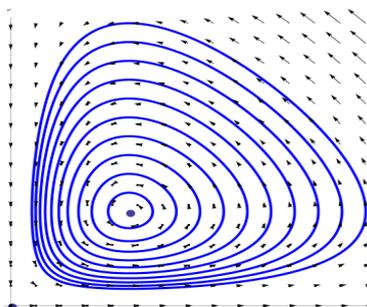
Siccome abbiamo deciso di studiare le soluzioni con $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$, definiamo le funzioni $u_1(t) = \ln x(t)$, $u_2(t) = \ln y(t)$. Abbiamo che

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y(t) = \alpha - \beta e^{u_2(t)}, \\ u_2'(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = -\gamma + \delta x(t) = -\gamma + \delta e^{u_1(t)}. \end{cases}$$

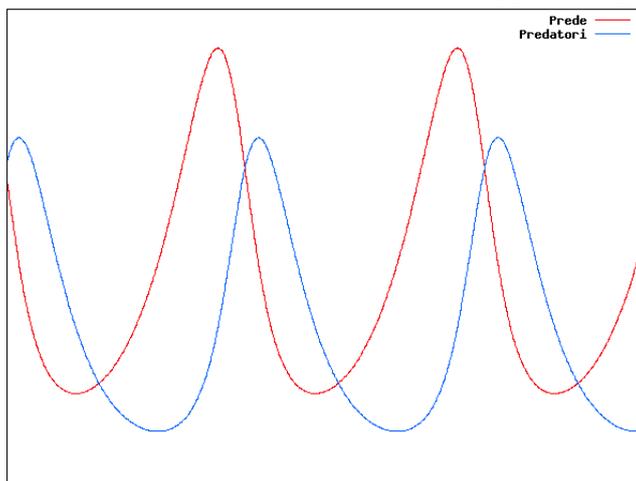
Per questo sistema c'è una funzione hamiltoniana:

$$H(u_1, u_2) = \delta e^{u_1} - \gamma u_1 + \beta e^{u_2} - \alpha u_2.$$

Le soluzioni stanno sulle linee di livello di questa funzione, che sono tutte curve chiuse. Tornando al piano delle fasi iniziale, abbiamo il seguente diagramma.



Le soluzioni sono periodiche e ruotano attorno al punto di equilibrio, in senso antiorario. Vediamo un possibile grafico di $x(t)$ e di $y(t)$.



Questo semplice modello, formulato intorno al 1920, può essere reso più realistico usando le idee introdotte nello studio di una singola popolazione. Ad esempio, la crescita alla Malthus delle prede potrebbe essere sostituita con

una crescita alla Verhulst, o con funzioni di crescita più sofisticate. Potrebbero essere introdotti anche un ritardo, costante o di tipo integrale, e perturbazioni stagionali. Lo stesso vale per i predatori, naturalmente. Questi modelli sono in fase di studio e alimentano molta ricerca attuale. Si possono trovare soluzioni periodiche, o quasi periodiche, studiarne la stabilità al variare dei parametri e delle condizioni iniziali. In alcuni casi si è persino evidenziato il fenomeno del *caos*, parola usata in situazioni di estrema instabilità, per cui piccolissime variazioni iniziali possono portare a un evolversi delle soluzioni del tutto imprevedibile.

Risulta molto importante, in questo contesto, il problema della *persistenza* di tutte le specie. Le oscillazioni osservate potrebbero infatti portare, nella realtà, all'estinzione delle prede o dei predatori.

2. Due specie in competizione

Supponiamo di avere due specie che competono per la sopravvivenza (ad esempio, hanno le stesse risorse di nutrimento, che sono limitate). Possiamo assumere che, in assenza dell'altra specie, ciascuna abbia una crescita di tipo logistico. Un modello plausibile è il seguente:

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x \left(1 - \frac{x + b_{12}y}{K_1} \right), \\ y' = \alpha_2 y \left(1 - \frac{y + b_{21}x}{K_2} \right). \end{cases}$$

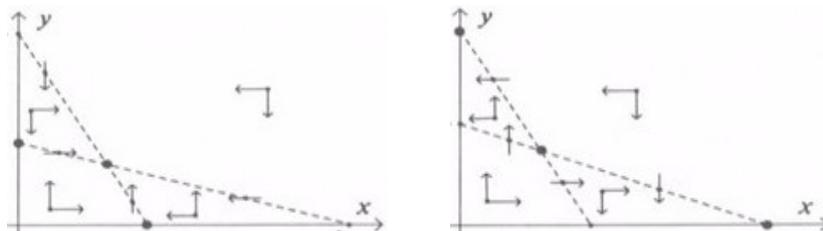
Anche qui le costanti $\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2, b_{12}, b_{21}$ sono tutte positive. In particolare, b_{12} misura l'effetto della specie v sulla crescita di u , mentre b_{21} misura l'effetto di u sulla crescita di v . A seconda dei parametri

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2},$$

possono verificarsi essenzialmente quattro situazioni diverse.

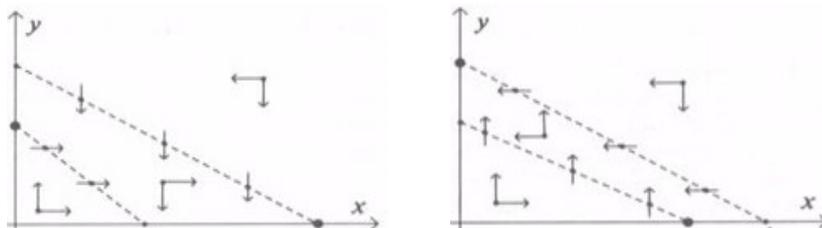
I caso: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Qui c'è un equilibrio stabile nel primo quadrante del piano delle fasi: le due specie possono coesistere.

II caso: $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$. Anche qui c'è un equilibrio, ma è instabile. A seconda delle condizioni iniziali, una delle due specie si estinguerà.



III caso: $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$. Non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie v si estingue, mentre la u si stabilizza verso la sua capacità portante K_1 .

IV caso: $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$. Anche qui non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie u si estingue, mentre la v si stabilizza verso la sua capacità portante K_2 .



20 Diffusione di epidemie

Nel 1927 Kermack e McKendrick introdussero il cosiddetto modello SIR con lo scopo di studiare l'epidemia di peste presentatasi a Bombay nel 1905-1906. Esso prende il nome dai compartimenti i cui si suddivide la popolazione: suscettibili, infetti e rimossi. Essi fecero le seguenti ipotesi:

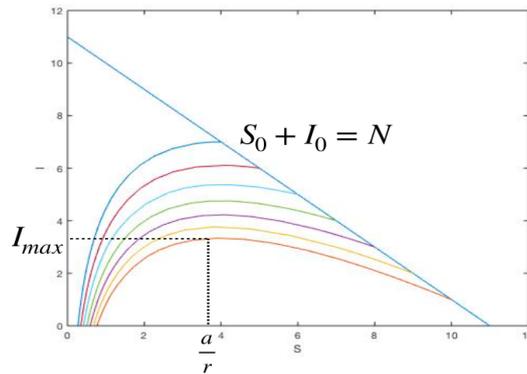
- tutti gli individui suscettibili sono infettabili nello stesso modo;
- le persone infette sono tutte ugualmente contagiose;
- una volta rimosse esse risultano immuni alla malattia.

Consideriamo malattie per le quali il contagio possa avvenire solo tramite contatto diretto tra due persone (una infetta e una suscettibile) e supponiamo che l'essere infetto non modifichi le abitudini del soggetto (non diminuiranno, quindi, i contatti con altre persone). Studieremo inoltre un'epidemia che si sviluppi in un periodo di tempo relativamente breve, per trascurare il numero di nascite o morti naturali.

Denotando con $S(t)$ il numero di suscettibili al tempo t , con $I(t)$ il numero degli infetti e con $R(t)$ il numero dei rimossi (che comprende sia i guariti che i morti), il modello proposto è il seguente:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) = \beta I(t). \end{cases}$$

Studiando le soluzioni di questo sistema si può osservare che, partendo da un numero basso di infetti, la malattia solitamente si sviluppa fino a che il numero di infetti raggiunge un massimo, per poi tendere a zero. Nel frattempo, molti suscettibili si ammalano, ma la cosa sorprendente è che un certo numero di essi non verrà mai contagiato, rimanendo quindi sempre sano. Questo fatto si può osservare dalla figura seguente, dove vengono rappresentate le curve $(S(t), I(t))$ con diversi valori iniziali. Le orbite vengono percorse da destra a sinistra e, dopo aver raggiunto il loro massimo, tendono ad avvicinarsi all'asse orizzontale, in un punto che rappresenta la fine dell'epidemia.



21 Il problema di Cauchy: esistenza e unicità

21.1 Esistenza locale

Nel 1890, Giuseppe Peano ha dimostrato il seguente risultato di “esistenza locale”.

Teorema 48 (di Peano) *Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$, esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$.*

Si noti che la soluzione potrebbe non essere unica. Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(u) = \sqrt{|u|}.$$

(Qui la funzione f non dipende esplicitamente da t . Si ha pertanto a che fare con un’“equazione differenziale autonoma”.) Si vede subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione costante $u(t) = 0$, ma anche la soluzione

$$u(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Inoltre, ce ne sono infinite altre, date da

$$u(t) = \begin{cases} (t - c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \geq 0$ è una costante arbitraria, oppure

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq c \\ -(t - c)^2 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \leq 0$, o anche

$$u(t) = \begin{cases} (t - c_2)^2 & \text{se } t \geq c_2 \\ 0 & \text{se } c_1 < t < c_2 \\ -(t - c_1)^2 & \text{se } t < c_1, \end{cases}$$

con $c_1 \leq 0 \leq c_2$.

Per avere anche l'unicità della soluzione, è necessario introdurre delle ipotesi aggiuntive sulla funzione f .

21.2 Alcune premesse sugli spazi metrici completi

Introduciamo ora il concetto di “completezza” per uno spazio metrico E . Diremo che $(a_n)_n$ è una “successione di Cauchy” in E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon .$$

Lo spazio metrico E si dirà “completo” se ogni successione di Cauchy ha un limite in E .

Si vede facilmente che, se $(a_n)_n$ ha un limite $\ell \in E$, allora è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon .$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio, \mathbb{Q} non è completo). Si può però dimostrare che \mathbb{R} è completo, così come ogni \mathbb{R}^N (e quindi, in particolare, anche \mathbb{C}).

Nel seguito, considereremo l'insieme $C([a, b], \mathbb{R}^N)$, costituito dalle funzioni continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si può definire in esso una norma:

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in [a, b]\};$$

sono infatti soddisfatte le quattro proprietà

- a) $\|f\|_\infty \geq 0$;
- b) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}$;
- c) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$;
- d) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Una volta verificate le proprietà della norma, è possibile definire la distanza

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty ,$$

Valgono infatti le seguenti proprietà:

- a) $d(f, g) \geq 0$;
- b) $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;
- c) $d(f, g) = d(g, f)$;
- d) $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$.

A questo punto $C([a, b], \mathbb{R}^N)$ risulta essere uno spazio metrico. Si può dimostrare che anch'esso è completo.

Nel seguito, se per una successione $(f_n)_n$ in $C([a, b], \mathbb{R}^N)$ si ha che $\lim_n f_n = f$, ossia $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, diremo che essa converge a f *uniformemente*.

Dato uno spazio metrico E , diremo che una funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è una “contrazione” se, per un certo $\alpha < 1$, si ha

$$d(\varphi(v), \varphi(w)) \leq \alpha d(v, w),$$

per ogni $v, w \in E$. Enunciamo il “teorema delle contrazioni”.

Teorema 49 *Se E è uno spazio metrico completo e $\varphi : E \rightarrow E$ è una contrazione, allora esiste un unico $x \in E$ tale che $\varphi(x) = x$. Inoltre, scegliendo $x_0 \in E$ arbitrariamente, la successione $(x_n)_n$ definita da*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

è tale che $\lim_n x_n = x$.

Siccome $\varphi(x) = x$, si dice che x è un “punto fisso” di φ .

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(x_n)_n$ definita come nell’enunciato, con $x_0 \in E$ arbitrario. Dimostriamo che è una successione di Cauchy. Osserviamo che, se m e n sono due numeri naturali, con $m < n$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Dimostriamo per induzione che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente proposizione:

$$(P_k) \quad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1).$$

Infatti, se $k = 0$ si ha chiaramente l’uguaglianza, per cui (P_0) è vera. Supponiamo ora vera (P_k) , per un certo $k \in \mathbb{N}$; allora

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(\varphi(x_k), \varphi(x_{k+1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1),$$

per cui è vera anche (P_{k+1}) .

Usando (P_k) , abbiamo quindi

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{n-1-m} \alpha^k \\ &= \alpha^m d(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \\ &\leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $\alpha \in [0, 1]$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

per cui $(x_n)_n$ è di Cauchy. Siccome E è completo, esiste il limite di $(x_n)_n$. Sia

$$\lim_n x_n = x \in E.$$

Allora, essendo φ continua,

$$\varphi(x) = \varphi(\lim_n x_n) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x,$$

il che dimostra che x è un punto fisso di φ .

Resta da dimostrare che il punto fisso è unico. Supponiamo che x' sia anch'esso un punto fisso di φ . Allora

$$d(x, x') = d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \alpha d(x, x'),$$

e siccome $\alpha < 1$, deve essere $x = x'$. ■

21.3 Esistenza e unicità locale

Definizione 9 Diremo che la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ (ossia chiuso e limitato) esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L_K \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in K .

Si può dimostrare la seguente

Proposizione 1 Ogni funzione di classe C^1 è localmente lipschitziana.

Enunciamo ora il teorema che ci interessa.

Teorema 50 (di Cauchy–Lipschitz) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una ed una sola soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Inoltre, la successione di funzioni $(u_n)_n$, definita da

$$u_0(t) = u_0, \quad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds,$$

è tale che $\lim_n u_n = u$, uniformemente su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$.

Dimostrazione. Per semplicità, supporremo $N = 1$; il caso generale si tratta in modo analogo. Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$K := [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2] \subseteq \Omega,$$

sia $L_K > 0$ la relativa costante di Lipschitz, e sia

$$M = \max\{|f(t, u)| : (t, u) \in K\}.$$

Scegliamo r_0 in questo modo:

$$r_0 = \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L_K + 1} \right\}.$$

Poniamo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e

$$E = \{u \in C(I_0, \mathbb{R}^N) : \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

(Qui u_0 denota la funzione costante con quel valore.) Essendo un sottoinsieme chiuso di $C(I_0, \mathbb{R}^N)$, che è completo, risulta anch'esso completo. Sia φ la funzione che associa ad ogni $v \in E$ la funzione $\varphi(v) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$[\varphi(v)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds.$$

Dimostriamo che $\varphi(v) \in E$. Infatti, $\varphi(v)$ è una funzione continua, e si ha

$$\|[\varphi(v)](t) - u_0\| = \left| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, v(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| < r_2.$$

Quindi, abbiamo definito una funzione $\varphi : E \rightarrow E$. Notiamo inoltre che, prese v, w in E , si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty &= \sup\{|\varphi(v)(t) - \varphi(w)(t)| : t \in I_0\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t (f(s, v(s)) - f(s, w(s))) ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - f(s, w(s))| ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t L_K |v(s) - w(s)| ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq L_K r_0 \|v - w\|_\infty. \end{aligned}$$

Ponendo $\alpha = L_K r_0$, si ha quindi che $\alpha < 1$ e

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty \leq \alpha \|v - w\|_\infty.$$

La funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è pertanto una contrazione, e per il Teorema delle Contrazioni esiste un unico $u \in E$ tale che $\varphi(u) = u$. Allora

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in I_0,$$

per cui $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione del nostro problema. Il Teorema delle Contrazioni assicura inoltre che la successione $(u_n)_n$ definita iterativamente in E da $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ converge a u , uniformemente. ■

21.4 L'unicità in grande

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

Poiché $u(0) = -1$, per continuità la soluzione u è negativa in un intorno di $t_0 = 0$; finché $u(t)$ non si annulla si può applicare il metodo di separazione delle variabili, che ci porta alla formula

$$u(t) = -(t-1)^2.$$

Tale funzione si annulla per $t = 1$, dunque il metodo fornisce una soluzione definita nell'intervallo $] -\infty, 1]$. In tale intervallo la soluzione è unica. Nel punto $(1, 0)$ il campo vettoriale cessa di essere localmente lipschitziano; da tale punto si biforcano infinite soluzioni per $t > 1$. In particolare, le funzioni

$$u_c(y) = \begin{cases} -(t-1)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < c \\ (t-c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

al variare di $c > 0$, sono tutte soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Questo esempio dimostra che può esserci unicità locale ma non globale. La perdita dell'unicità nell'esempio precedente è dovuta al fatto che, pur essendoci unicità locale in un intorno di t_0 , la traiettoria della soluzione passa per un punto in cui si perdono la locale lipschitzianità del campo vettoriale e l'unicità delle soluzioni ivi passanti.

Teorema 51 *Sia f localmente lipschitziana e siano $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzioni del problema (PC), con I_1, I_2 intervalli aperti. Allora $u_1 = u_2$ su $I_1 \cap I_2$.*

Dimostrazione. Sia $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t_0, t]\}$. Per assurdo, sia $t_1 = \sup J < \sup I_1 \cap I_2$, per cui $t_1 \in I_1 \cap I_2$. Applicando il Teorema di Cauchy–Lipschitz al problema di Cauchy con condizione iniziale $u(t_1) = u_1(t_1)$, si trova una contraddizione. Si giunge poi ad un'analogha contraddizione anche se $\inf J > \inf I_1 \cap I_2$. ■

22 Prolungabilità ed esistenza globale

Definizione 10 *Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione di (1). Diremo che una funzione $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un "prolungamento" di u se I è un sottoinsieme proprio di I_* e u_* è anch'essa una soluzione di (1). Si dice che u è una "soluzione massimale" se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione I viene allora detto "intervallo massimale di esistenza" di u .*

Proposizione 2 *L'intervallo massimale di esistenza di una soluzione è un intervallo aperto.*

Dimostrazione. Se per assurdo l'intervallo massimale I contenesse il suo estremo destro $b = \max I$, potrei considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$$

e trovarne una soluzione $v : [b - \delta, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$, per un certo $\delta > 0$. Sia allora $u_* : I \cup [b, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in I \\ v(t) & \text{se } t \in]b, b + \delta]. \end{cases}$$

Si può verificare che u_* è derivabile (anche nel punto b) ed è un prolungamento di u , in contraddizione con l'ipotesi. Analogamente se I contenesse il suo estremo sinistro. ■

Teorema 52 *Sia f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora ogni soluzione u del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a un intervallo massimale $] \alpha, \omega [$, con $-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$.*

Dimostrazione. Si consideri l'insieme \mathcal{S} di tutte le possibili soluzioni del problema (PC). Ogni $u \in \mathcal{S}$ avrà per dominio un intervallo, che indichiamo con I_u . Sia $I_* = \cup_{u \in \mathcal{S}} I_u$ e si definisca $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ ponendo $u_*(t) = u(t)$ se $t \in I_u$. Bisogna verificare che questa è una buona definizione, cioè che il valore di $u_*(t)$ non dipende dalla scelta dell'intervallo I_u a cui t appartiene. Sia dunque $t \in I_u \cap I_v$, dove $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono due soluzioni del problema (PC). Per l'unicità, si ha che $u = v$ su $I_u \cap I_v$, per cui $u(t) = v(t)$.

Se ora $u^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione che prolunga $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$, allora $u^* \in \mathcal{S}$, perciò per costruzione $I^* \subseteq I_*$. Quindi u_* non ammette prolungamenti: è una soluzione massimale. ■

Teorema 53 *Sia f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) sul suo intervallo massimale $] \alpha, \omega [$. Allora per ogni compatto $K_0 \subseteq \Omega$ contenente (t_0, x_0) esistono un $a_0 \in] \alpha, t_0 [$ e un $b_0 \in] t_0, \omega [$ tali che*

$$t \in] \alpha, a_0 [\cup] b_0, \omega [\Rightarrow (t, u(t)) \notin K_0.$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno del seguente risultato preliminare.

Lemma 1 *Sia f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) su un intervallo $] a, b [$. Se esiste una successione crescente $(t_n)_n$ in $] t_0, b [$ tale che $t_n \rightarrow b^-$ e $u(t_n) \rightarrow \bar{u}$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$, con $(b, \bar{u}) \in \Omega$, allora la soluzione u è prolungabile all'intervallo $] a, b [$.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione $\tilde{u} :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ in questo modo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t < b \\ \bar{u} & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Siccome

$$u(t_n) = u_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, u(s)) ds,$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\tilde{u}(b) = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, u(s)) ds = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, \tilde{u}(s)) ds,$$

e pertanto

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in]a, b].$$

Se dimostriamo che \tilde{u} è continua, per il Teorema 47 avremo che essa è soluzione del problema (PC) sull'intervallo $]a, b]$, quindi è un prolungamento di u . Faremo quindi vedere che \tilde{u} è continua anche in b , ossia che $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = \bar{u}$.

Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$K := [b - r_1, b + r_1] \times \bar{B}(\bar{u}, r_2) \subseteq \Omega,$$

e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \max\{4Mr_1, r_2\}$. Esiste un \bar{n} tale che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$b - t_n < \frac{\varepsilon}{4M} < r_1, \quad \|u(t_n) - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$t \in [t_{\bar{n}}, b[\Rightarrow \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per assurdo, supponiamo che l'insieme

$$E = \left\{ t \in [t_{\bar{n}}, b[: \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

sia non vuoto, e poniamo $\tau = \inf E$. Per la continuità, $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$, e quindi $\tau > t_{\bar{n}}$. Notiamo inoltre che

$$\xi \in [t_{\bar{n}}, \tau[\Rightarrow \|u(\xi) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\xi, u(\xi)) \in K.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| &\leq \sup\{\|u'(\xi)\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &= \sup\{\|f(\xi, u(\xi))\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &\leq M(\tau - t_{\bar{n}}) \leq M(b - t_{\bar{n}}) < M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

una contraddizione, essendo $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Naturalmente, vale un lemma analogo se $t_n \rightarrow a^+$.

Dimostrazione del Teorema 53. Se $\omega = +\infty$, basta prendere $b_0 > t_0$ sufficientemente grande. Se $\omega \in \mathbb{R}$, supponiamo che esista un compatto $K_0 \subseteq \Omega$ e una successione crescente $(t_n)_n$ in $]t_0, \omega[$ tale che $t_n \rightarrow \omega^-$ e $(t_n, u(t_n)) \in K_0$. Per la compattezza di K_0 , esiste una sottosuccessione $(t_{n_k})_k$ tale che $(t_{n_k}, u(t_{n_k})) \rightarrow (\omega, \bar{u}) \in K_0$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$. Per il Lemma 1, la soluzione u si può estendere a $]\alpha, \omega]$, una contraddizione. Analogo ragionamento per α . ■

Osserviamo che, anche quando l'insieme Ω ha una proiezione sulla coordinata t che coincide con tutto \mathbb{R} , l'intervallo di esistenza massimale $]\alpha, \beta[$ potrebbe essere un sottoinsieme proprio di \mathbb{R} . Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(u) = u^2$. Si verifica subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

ha come soluzione $u(t) = (1 - t)^{-1}$, per cui $]\alpha, \beta[=] - \infty, 1[$.

Per garantire l'“esistenza globale” della soluzione u , è necessario controllare la crescita in norma. Ad esempio, si può dimostrare il seguente risultato, dove $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 54 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Se inoltre esiste una funzione continua $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ per cui*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (3)$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, allora la soluzione del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a tutto \mathbb{R} .

Nella dimostrazione avremo bisogno del seguente

Lemma 2 (di Gronwall) *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$ e $\nu : I \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua. Se esistono $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$ tali che*

$$\nu(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t \nu(s) ds \right|, \quad \text{per ogni } t \in I,$$

allora

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo dapprima l'intervallo $I \cap [t_0, +\infty[$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e definiamo la funzione $\phi_\varepsilon : I \cap [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\phi_\varepsilon(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_{t_0}^t \nu(s) ds.$$

Si noti che $\phi_\varepsilon(t) > \nu(t) \geq 0$. Allora, per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$,

$$\phi_\varepsilon'(t) = \beta \nu(t) \leq \beta \phi_\varepsilon(t),$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \ln \phi_\varepsilon(t) \leq \beta.$$

Integrando su $[t_0, t]$,

$$\ln \frac{\phi_\varepsilon(t)}{\phi_\varepsilon(t_0)} \leq \beta(t - t_0),$$

da cui

$$\nu(t) \leq \phi_\varepsilon(t) \leq \phi_\varepsilon(t_0)e^{\beta(t-t_0)} = (\alpha + \varepsilon)e^{\beta(t-t_0)},$$

per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$ e ogni $\varepsilon > 0$. Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap [t_0, +\infty[.$$

Consideriamo ora l'intervallo $I \cap]-\infty, t_0]$. Definiamo l'intervallo $J = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau = 2t_0 - t, \text{ con } t \in I\}$ e la funzione $w : J \rightarrow [0, +\infty[$ definita da $w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau)$. Se $t \in I \cap]-\infty, t_0]$, allora $\tau = 2t_0 - t \in J \cap [t_0, +\infty[$ e

$$w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau) \leq \alpha + \beta \int_{2t_0 - \tau}^{t_0} \nu(s) ds = \alpha + \beta \int_{t_0}^{\tau} w(\sigma) d\sigma.$$

Per quanto visto sopra,

$$w(\tau) \leq \alpha e^{\beta(\tau-t_0)}, \quad \text{per ogni } \tau \in J \cap [t_0, +\infty[,$$

per cui

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t_0-t)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap]-\infty, t_0].$$

La dimostrazione è così completa. ■

Dimostrazione del Teorema 54. Sia $u :]\alpha, \omega[\rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione del problema (PC), definita sul suo intervallo massimale, con $\alpha < t_0 < \omega$. Supponiamo per assurdo che $\omega \in \mathbb{R}$, e poniamo

$$\ell_1 = \max\{\ell(t) : t \in [t_0, \omega]\}, \quad R = [\|u_0\| + \ell_1|\omega - t_0|] e^{\ell_1(\omega-t_0)}.$$

Preso il compatto $K_0 = [t_0, \omega] \times \overline{B}(0, R)$, possiamo applicare il Teorema 53 e trovare un $b_0 \in]t_0, \omega[$ tale che

$$t \in]b_0, \omega[\Rightarrow u(t) \notin \overline{B}(0, R).$$

D'altra parte, per ogni $t \in [t_0, \omega[$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \ell(s)(\|u(s)\| + 1) ds \\ &\leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)] + \ell_1 \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall, con $\nu(t) = \|u(t)\|$, abbiamo che, per ogni $t \in [t_0, \omega[$,

$$\|u(t)\| \leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)]e^{\ell_1(t-t_0)} < R,$$

una contraddizione. ■

23 Dipendenza dai dati

Nelle applicazioni è importante avere una “dipendenza continua” dai dati del problema che si vuole studiare. Infatti, le misurazioni non sono mai esatte, ma presentano delle piccole imprecisioni, che però non dovrebbero influire troppo sulle previsioni date dal modello matematico.

Nell’enunciato seguente, supponiamo per semplicità che sia $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 55 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e sia $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua tale che*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (4)$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Sia u la soluzione massimale del problema (PC). Allora u è definita su tutto \mathbb{R} . Inoltre, fissati a, b tali che $a < t_0 < b$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ soddisfano

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,^5$$

allora ogni soluzione massimale \tilde{u} del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

è definita su tutto \mathbb{R} e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Dimostrazione. Per il Teorema 54, la soluzione u è definita su tutto \mathbb{R} . Prenderemo inoltre $\delta \in]0, 1]$, per cui si trova facilmente una funzione continua $\hat{\ell} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ tale che, se $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta$, allora

$$\|\tilde{f}(t, v)\| \leq \hat{\ell}(t)(\|v\| + 1),$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Tutte le soluzioni \tilde{u} sono pertanto definite su tutto \mathbb{R} , e seguendo la dimostrazione del Teorema 54, ponendo $\hat{\ell}_1 = \max\{\hat{\ell}(t) : t \in [a, b]\}$, se $\tilde{t}_0 \in [a, b]$ e $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$ si ha che

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq [(\|u_0\| + 1) + \hat{\ell}_1(b - a)]e^{\hat{\ell}_1(b-a)} := R.$$

⁵Qui $\|g\|_\infty = \sup\{g(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\}$.

Sia $K = [a, b] \times \overline{B}(0, R)$, un compatto, sia L_K la relativa costante di Lipschitz di f su K (vedi la Proposizione ??), e sia

$$M = \max\{\|f(t, v)\| : (t, v) \in K\}.$$

Siccome $\delta \leq 1$, abbiamo che

$$\max\{\|\tilde{f}(t, v)\| : (t, v) \in K\} \leq M + 1.$$

Scriviamo

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds.$$

Allora, per $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \left\| u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))) ds + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds + \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds \right| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + L_K \int_{t_0}^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\| ds + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0|. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(t-t_0)} \\ &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(b-a)}. \end{aligned}$$

Analogamente se $t < t_0$. Da qui la conclusione. ■

Si potrebbe dimostrare un risultato più generale, che qui solo enunciamo.

Teorema 56 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Indichiamo con u la soluzione del problema (PC), definita sull'intervallo massimale $] \alpha, \beta[$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni intervallo compatto $[a, b] \subseteq] \alpha, \beta[$, contenente al suo interno t_0 , esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \Omega$ e $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ soddisfano*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,$$

allora ogni soluzione \tilde{u} del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

si può estendere al dominio $[a, b]$ e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

24 Stabilità degli equilibri

Consideriamo un'equazione differenziale autonoma

$$u' = f(u), \quad (5)$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Si dice che $u_0 \in \Omega$ è un “equilibrio” o “punto stazionario” dell'equazione differenziale (5) se $f(u_0) = 0$. In altri termini, la funzione costante $u(t) = u_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale (5).

Definizione 11 Diremo che un punto di equilibrio u_0 è “stabile” se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta$, allora

$$\|u(t) - u_0\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \geq \tau.$$

Diremo che un equilibrio u_0 è “asintoticamente stabile” se è stabile ed esiste un $\delta' > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta'$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0.$$

Nel caso in cui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1 , abbiamo il seguente.

Teorema 57 Sia u_0 un equilibrio per l'equazione differenziale (5). Se gli autovalori della matrice jacobiana $Jf(u_0)$ hanno tutti parte reale negativa, allora u_0 è asintoticamente stabile. Se esiste un autovalore con parte reale positiva, tale equilibrio non è stabile.

25 Teoria dell'integrale - il caso $N = 1$

In tutta questa sezione indicheremo con I un intervallo compatto di \mathbb{R} .

25.1 p-partizioni e somme di Riemann

Incominciamo con l'introdurre la nozione di p-partizione dell'intervallo I .

Definizione 12 Una “partizione puntata” (o “p-partizione”) dell'intervallo $I = [a, b]$ è un insieme

$$\mathring{P} = \{(x_1, [a_0, a_1]), (x_2, [a_1, a_2]), \dots, (x_m, [a_{m-1}, a_m])\}$$

i cui elementi appaiono come coppie $(x_j, [a_{j-1}, a_j])$, dove $[a_{j-1}, a_j]$ è un sottointervallo di I e x_j è un punto in esso. Precisamente, si ha

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$$

e, per ogni $1 \leq j \leq m$,

$$x_j \in [a_{j-1}, a_j].$$

Consideriamo ora una funzione f definita sull'intervallo I . Ad ogni p -partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ dell'intervallo I possiamo associare un numero reale, nel modo seguente.

Definizione 13 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e

$$\mathring{\mathcal{P}} = \{(x_1, [a_0, a_1]), (x_2, [a_1, a_2]), \dots, (x_m, [a_{m-1}, a_m])\}$$

una p -partizione di I . Si chiama “somma di Riemann” associata a f e $\mathring{\mathcal{P}}$ il numero reale $S(f, \mathring{\mathcal{P}})$ definito da

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^m f(x_j)(a_j - a_{j-1}).$$

Ci chiediamo ora se, prendendo delle p -partizioni via via più fini, le somme di Riemann ad esse associate convergono ad un qualche valore. Nel caso che ciò avvenga per una funzione positiva f , tale valore può essere visualizzato come la misura dell'area della regione del piano cartesiano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse. Per poter analizzare la questione, dobbiamo specificare cosa si intende per “finezza” di una p -partizione.

25.2 La nozione di δ -finezza

Introduciamo una nozione di finezza della p -partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra definita. Per brevità, chiameremo **calibro** su I ogni funzione $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione ci servirà per avere un controllo sull'ampiezza dei vari sottointervalli determinati dai punti della p -partizione.

Definizione 14 Dato che sia un *calibro* δ su I , diremo che la p -partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra introdotta è **δ -fine** se, per ogni $1 \leq j \leq m$,

$$x_j - a_{j-1} \leq \delta(x_j) \quad e \quad a_j - x_j \leq \delta(x_j).$$

Equivalentemente, abbiamo

$$[a_{j-1}, a_j] \subset [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)].$$

Mostriamo ora che è sempre possibile trovare una p -partizione δ -fine dell'intervallo I , qualunque sia il *calibro* δ . Nel teorema che segue, dovuto a P. Cousin, la compattezza dell'intervallo I gioca un ruolo essenziale.

Teorema 58 Dato un intervallo compatto I , per ogni *calibro* δ su I esiste una p -partizione δ -fine di I .

Dimostrazione. Ragioneremo per assurdo. Supponiamo che esista un calibro δ su I per il quale non sia possibile trovare alcuna p -partizione δ -fine di I . Dividiamo l'intervallo I in due sottointervalli chiusi uguali, aventi il punto di mezzo come estremo comune. Allora almeno uno dei due sottointervalli non ha alcuna p -partizione δ -fine. Scegiamolo, e dividiamolo a sua volta in due sottointervalli chiusi uguali. Continuando in questo modo, ci costruiamo una successione $(I_n)_n$ di sottointervalli chiusi imbottigliati la cui lunghezza tende a zero, ognuno dei quali non possiede alcuna p -partizione δ -fine. Per il Teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto $c \in I$ che appartiene a tutti questi intervalli. È inoltre chiaro che da un certo n in poi, tutti gli I_n saranno contenuti in $[c - \delta(c), c + \delta(c)]$. Prendiamo uno di questi: sia esso $I_{\bar{n}}$. Allora l'insieme $\mathring{\mathcal{P}} = \{(c, I_{\bar{n}})\}$, il cui unico elemento è la coppia $(c, I_{\bar{n}})$, è una p -partizione δ -fine di $I_{\bar{n}}$, in contraddizione con quanto sopra. ■

25.3 Funzioni integrabili su un intervallo compatto

Consideriamo una funzione f definita sull'intervallo I . Siamo ora in grado di definire cosa intendiamo per convergenza delle somme di Riemann qualora le p -partizioni diventino via via più fini. La seguente definizione è dovuta a R. Henstock e J. Kurzweil.

Definizione 15 Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile** su I se esiste un numero reale \mathcal{J} avente la seguente proprietà: comunque scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare un calibro δ su I tale che, per ogni p -partizione δ -fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I , si abbia

$$|S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}| \leq \varepsilon.$$

Dimostriamo che esiste al più un $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Se ce ne fosse un secondo, chiamiamolo \mathcal{J}' , avremmo che per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbero due calibri δ e δ' su I associati rispettivamente a \mathcal{J} e a \mathcal{J}' dalla definizione. Definiamo il calibro δ'' :

$$\delta''(x) = \min\{\delta(x), \delta'(x)\}.$$

Preso una p -partizione δ'' -fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I , si ha che $\mathring{\mathcal{P}}$ è sia δ -fine che δ' -fine, e perciò

$$|\mathcal{J} - \mathcal{J}'| \leq |\mathcal{J} - S(f, \mathring{\mathcal{P}})| + |S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \mathcal{J}'| \leq 2\varepsilon.$$

Siccome ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, si deve necessariamente avere $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$.

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su I , l'unico elemento $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione si chiama l'**integrale** di f su I e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_I f, \quad \int_a^b f, \quad \int_I f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx.$$

La presenza della lettera x nella notazione qui introdotta non ha importanza in sè. Essa potrebbe essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera u , α , o da un qualunque altro simbolo, purché non abbia già un altro significato.

Si pone inoltre, per motivi che saranno chiariti più avanti,

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^a f = 0.$$

Definizione 16 Diremo che una funzione integrabile su I è **ivi \mathbf{R} -integrabile** (o integrabile secondo Riemann), se tra i possibili calibri δ che verificano le condizioni della definizione di integrabilità se ne può sempre prendere uno costante su tutto I .

25.4 Proprietà elementari dell'integrale

Proposizione 3 Se f e g sono integrabili su I , allora $f + g$ è integrabile su I e si ha:

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

Proposizione 4 Se f è integrabile su I e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora αf è integrabile su I e si ha:

$$\int_I (\alpha f) = \alpha \left(\int_I f \right).$$

Abbiamo così dimostrato che l'insieme delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale, e che l'integrale è una funzione lineare su di esso.

Proposizione 5 Se f e g sono integrabili su I e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$, allora

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Corollario 9 Se f e $|f|$ sono integrabili su I , allora

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Dimostrazione. Applicando il corollario precedente alle disuguaglianze

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

si ha

$$- \int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|,$$

da cui la tesi. ■

Proposizione 6 Siano dati tre punti $a < c < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se lo è sia su $[a, c]$ che su $[c, b]$. In tal caso, si ha

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

È facile vedere come dall'enunciato precedente segua che se una funzione è integrabile su un intervallo I , lo è anche su ogni suo sottointervallo. Inoltre, si ha il seguente

Corollario 10 *Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su I , presi comunque tre punti u, v, w in I si ha*

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f.$$

25.5 Il Teorema Fondamentale

Introduciamo il concetto di funzione primitiva di una data funzione.

Definizione 17 *Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **primitivabile** su I se esiste una funzione derivabile $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione F si chiama **primitiva** di f su I .*

Il Teorema Fondamentale stabilisce che tutte le funzioni primitivabili sono integrabili, e che il loro integrale si può calcolare facilmente, nota che sia una loro primitiva.

Teorema 59 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione primitivabile su $[a, b]$ e sia F una qualunque sua primitiva. Allora f è integrabile su $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Talvolta è comodo indicare la differenza $F(b) - F(a)$ con i simboli

$$[F]_a^b, \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b},$$

o con varianti di questi, come ad esempio $[F(x)]_a^b$, qualora non ci siano ambiguità.

Il fatto che la differenza $F(b) - F(a)$ non dipende dalla primitiva in questione è spiegato dalla seguente proposizione.

Proposizione 7 *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione primitivabile, e sia F una sua primitiva. Allora una funzione $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ è primitiva di f se e solo se $F - G$ è una funzione costante su I .*

Si può dimostrare che ogni funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è primitivabile.

26 Integrazione di funzioni di più variabili

In questa lezione estenderemo la teoria per poter trattare funzioni di più variabili definite su sottoinsiemi di \mathbb{R}^N , a valori in \mathbb{R} . Per semplicità di esposizione, ci limiteremo spesso al caso $N = 2$. Non sarà difficile al lettore estendere la trattazione al caso di una dimensione N generica.

26.1 L'integrabilità sui rettangoli

Incominciamo con il considerare il caso di funzioni definite su rettangoli. Un **rettangolo** di \mathbb{R}^N è un insieme del tipo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$. Questa dicitura è certamente familiare nel caso $N = 2$. Se $N = 1$, un rettangolo risulta essere un intervallo chiuso e limitato. Se $N = 3$, si usa anche la dicitura di “parallelepipedo rettangolo”. Nell'esposizione che segue, ci concentriamo per semplicità sul caso bidimensionale. Il caso generale è del tutto simile e non presenta maggiori difficoltà, tranne che per le notazioni.

Consideriamo un rettangolo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo la misura di I :

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Diremo che due rettangoli sono non sovrapposti se i loro interni sono disgiunti.

Una “partizione puntata”, o “p-partizione” del rettangolo I è un insieme

$$\mathring{\mathcal{P}} = \{(\mathbf{x}_1, I_1), (\mathbf{x}_2, I_2), \dots, (\mathbf{x}_m, I_m)\},$$

dove gli I_j sono dei rettangoli a due a due non sovrapposti la cui unione è I e $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ è un punto in I_j , per ogni $j = 1, 2, \dots, m$.

Consideriamo ora una funzione f definita sul rettangolo I , a valori in \mathbb{R} , e sia $\mathring{\mathcal{P}} = \{(\mathbf{x}_j, I_j) : j = 1, \dots, m\}$ una p-partizione di I . Si chiama “somma di Riemann” associata a f e $\mathring{\mathcal{P}}$ il numero reale $S(f, \mathring{\mathcal{P}})$ definito da

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^m f(\mathbf{x}_j) \mu(I_j).$$

Nel caso di una funzione f positiva, questo numero è la somma delle misure dei volumi dei parallelepipedi aventi come base I_j e come altezza $[0, f(\mathbf{x}_j)]$.

Introduciamo una nozione di finezza della p-partizione Π sopra definita. Chiameremo “calibro” su I ogni funzione $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\delta(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in I$. Dato che sia un calibre δ su I , diremo che la p-partizione $\mathring{\mathcal{P}}$ sopra introdotta è “ δ -fine” se, per ogni $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$I_j \subseteq [x_j - \delta(x_j, y_j), x_j + \delta(x_j, y_j)] \times [y_j - \delta(x_j, y_j), y_j + \delta(x_j, y_j)].$$

In seguito, dati $\mathbf{x} = (x, y) \in I$ e $r > 0$, per abbreviare le notazioni scriveremo

$$B[\mathbf{x}, r] = [x - r, x + r] \times [y - r, y + r];$$

la p-partizione Π sarà quindi δ -fine se, per ogni $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$I_j \subseteq B[\mathbf{x}_j, \delta(\mathbf{x}_j)].$$

Come nel caso unidimensionale, si può dimostrare che per ogni calibre δ su I esiste una p-partizione δ -fine di I . La definizione che segue è identica a quella vista nel caso $N = 1$.

Definizione 18 Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile** sul rettangolo I se esiste un numero reale \mathcal{J} avente la seguente proprietà: comunque scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare un calibro δ su I tale che, per ogni p -partizione δ -fine Π di I , si abbia

$$|S(f, \mathcal{P}) - \mathcal{J}| \leq \varepsilon.$$

Elenchiamo ora brevemente tutte le proprietà che si possono ottenere a partire dalla definizione data in modo del tutto simile a quanto fatto nel caso di una funzione di una variabile.

Esiste al più un $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Tale numero reale si chiama l'**integrale** di f su I e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_I f, \quad \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

L'insieme delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso:

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g, \quad \int_I (cf) = c \int_I f$$

(dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante); esso conserva l'ordine:

$$f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g.$$

Inoltre, si ha la seguente versione del teorema di **additività su sottorettangoli**.

Teorema 60 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e siano K_1, K_2, \dots, K_l dei sottorettangoli di I a due a due non sovrapposti, la cui unione è I . Allora f è integrabile su I se e solo se lo è su ognuno dei K_i . In tal caso, si ha

$$\int_I f = \sum_{i=1}^l \int_{K_i} f.$$

In particolare, se una funzione è integrabile su un rettangolo, lo è anche su ogni sottorettangolo.

Diremo che una funzione integrabile su I è **R-integrabile** (o integrabile secondo Riemann), se tra i possibili calibri δ che verificano le condizioni della definizione di integrabilità se ne può sempre prendere uno costante su tutto I . L'insieme delle funzioni R-integrabili è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni integrabili e contiene il sottospazio delle funzioni continue.

Diremo che una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile su I , è ivi **L-integrabile** (o integrabile secondo Lebesgue), se $|f|$ risulta anch'essa integrabile su I . Le funzioni L-integrabili costituiscono un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni integrabili e contiene il sottospazio delle funzioni R-integrabili. In generale, però, non è detto che una funzione primitivabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia L-integrabile.

Dato un insieme limitato E e una funzione f il cui dominio contiene E , definiamo la funzione f_E come segue:

$$f_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin E. \end{cases}$$

Possiamo dimostrare la seguente

Proposizione 8 *Siano I_1 e I_2 due rettangoli contenenti l'insieme E . Allora f_E è integrabile su I_1 se e solo se lo è su I_2 . In tal caso, si ha che $\int_{I_1} f_E = \int_{I_2} f_E$.*

Siamo così portati alla seguente definizione.

Definizione 19 *Dato un insieme limitato E , diremo che la funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su E se esiste un rettangolo I contenente l'insieme E sul quale f_E risulta integrabile. In tal caso, si pone*

$$\int_E f = \int_I f_E.$$

Nel caso in cui f sia integrabile su E secondo la definizione ora data, si ha che f_E risulta integrabile su ogni rettangolo contenente l'insieme E , e inoltre l'integrale di f_E su ciascuno di tali rettangoli è un numero che rimane invariato.

Le funzioni continue sono R -integrabili su ogni rettangolo I . Vale inoltre la seguente proprietà.

Teorema 61 *Sia E un insieme compatto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è L -integrabile su E .*

Con la definizione data, **si estendono facilmente tutte le proprietà dell'integrale viste finora**. Fa però eccezione l'*additività*, in quanto non si può affermare in generale che una funzione integrabile su un insieme limitato lo sia anche sui suoi sottoinsiemi. Vale però il seguente

Teorema 62 *Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione L -integrabile su un insieme limitato E . Allora f è L -integrabile su ogni sottoinsieme misurabile di E .*

27 La misura di un insieme limitato

Definizione 20 *Un insieme limitato E si dice **misurabile** se la funzione costante 1 è integrabile su E . In tal caso, il numero $\int_E 1$ viene detto **misura** di E e si indica con $\mu(E)$.*

La misura di un insieme misurabile è quindi un numero non negativo; per convenzione, la misura dell'insieme vuoto vale 0. Nel caso di un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , la misura si dice anche **area** dell'insieme. Se $E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ è un rettangolo, si vede facilmente che

$$\mu(E) = \int_E 1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2),$$

per cui la notazione è compatibile con quella già introdotta per i rettangoli. Per un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , la misura si dice anche **volume** dell'insieme.

Purtroppo, non tutti gli insiemi sono misurabili. Si possono in effetti costruire degli insiemi non misurabili, con conseguenze talvolta imbarazzanti. Nel seguito faremo attenzione a che gli insiemi considerati siano sempre misurabili.

Vediamo alcune proprietà della misura. È utile introdurre la funzione caratteristica di un insieme E , definita da

$$\chi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in E, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin E. \end{cases}$$

Se I è un rettangolo contenente l'insieme E , si ha quindi

$$\mu(E) = \int_I \chi_E.$$

Proposizione 9 *Siano A e B due insiemi limitati misurabili. Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *Se $A \subseteq B$, allora $B \setminus A$ è misurabile e*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A);$$

in particolare, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) *$A \cup B$ e $A \cap B$ sono misurabili e*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B);$$

in particolare, se A e B sono disgiunti, allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Dimostrazione. Se $A \subseteq B$, si ha $\chi_{B \setminus A} = \chi_B - \chi_A$, e la proprietà (a) segue integrando.

Essendo $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$ e $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$, si ha che $\chi_{A \cup B}$ e $\chi_{A \cap B}$ sono integrabili. Inoltre,

$$\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B,$$

e integrando si ha la (b). ■

Chiaramente, si ha che l'insieme vuoto è misurabile e $\mu(\emptyset) = 0$. Inoltre, si può dimostrare che ogni insieme aperto e limitato è misurabile, così come ogni insieme chiuso e limitato.

Proposizione 10 *Sia E un insieme limitato misurabile e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata a valori non negativi. Sia G_f l'insieme così definito:*

$$G_f = \{(\mathbf{x}, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(\mathbf{x})\}.$$

Allora f è integrabile su E se e solo se G_f è misurabile, nel qual caso si ha:

$$\mu(G_f) = \int_E f.$$

28 Insiemi trascurabili

Definizione 21 Diremo che un insieme limitato è **trascurabile** se è misurabile e la sua misura è nulla.

Nel seguito di questa sezione supporremo sempre che E sia un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^N . Vediamo come si possono caratterizzare gli insiemi limitati trascurabili. Nella seguente proposizione, la dicitura tra parentesi quadre può essere omessa.

Proposizione 11 Sia E un insieme limitato. Si ha che E è trascurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita o numerabile (J_k) di rettangoli [a due a due non sovrapposti] tali che:

$$E \subseteq \bigcup_k J_k, \quad \sum_k \mu(J_k) \leq \varepsilon.$$

Ogni insieme costituito da un unico punto è trascurabile. Ma sono trascurabili anche tutti gli insiemi finiti o numerabili limitati. Il lato di un rettangolo in \mathbb{R}^2 è un insieme trascurabile.

Definizione 22 Sia E un insieme limitato. Una proposizione si dice essere vera **quasi ovunque** su E (o per quasi ogni punto di E) se l'insieme dei punti in cui non è vera è trascurabile.

Teorema 63 Se due funzioni f e g , definite sull'insieme limitato E , coincidono quasi ovunque, allora f è integrabile su E se e solo se lo è g . In tal caso, $\int_E f = \int_E g$.

Quest'ultimo risultato ci permette di considerare delle funzioni definite quasi ovunque, e definirne l'integrale.

Definizione 23 Una funzione f , definita quasi ovunque su un insieme limitato E , a valori reali, si dice **integrabile su E** se si può estendere ad una funzione $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile su E . In tal caso, si pone $\int_E f = \int_E g$.

Si può vedere che **tutte le proprietà e i teoremi visti finora continuano a valere per tali funzioni.**

Risulta interessante la seguente caratterizzazione delle funzioni R -integrabili.

Teorema 64 Sia I un rettangolo. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è R -integrabile se e solo se è limitata e continua quasi ovunque.

29 La formula di riduzione

Il seguente teorema, dovuto a G. Fubini, permette di calcolare l'integrale di una funzione integrabile di due variabili effettuando due integrazioni di funzioni di una variabile.

Teorema 65 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul rettangolo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Allora:

- (i) per quasi ogni $x \in [a_1, b_1]$, la funzione $f(x, \cdot)$ è integrabile su $[a_2, b_2]$;
- (ii) la funzione $\int_{a_2}^{b_2} f(\cdot, y) dy$, definita quasi ovunque su $[a_1, b_1]$, è ivi integrabile;
- (iii) si ha:

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Dimostrazione. Per dare un'idea della dimostrazione, considereremo il caso semplificato in cui $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua. Essendo $f(x, \cdot) : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, essa è R-integrabile; definiamo

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy.$$

Vogliamo dimostrare che F è R-integrabile su $[a_1, b_1]$ e che

$$\int_{a_1}^{b_1} F = \int_I f.$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per la R-integrabilità di f su I , esiste un calibro costante δ su I tale che, per ogni p-partizione δ -fine $\mathring{\mathcal{P}}$ di I ,

$$\left| S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \int_I f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dimostreremo che, per ogni p-partizione δ -fine $\mathring{\mathcal{P}}_1$ di $[a_1, b_1]$,

$$\left| S(F, \mathring{\mathcal{P}}_1) - \int_I f \right| \leq \varepsilon.$$

Consideriamo dunque una p-partizione δ -fine di $[a_1, b_1]$,

$$\mathring{\mathcal{P}}_1 = \{(x_i, J_i) : i = 1, \dots, n\}.$$

Per ogni $i = 1, \dots, n$, essendo $f(x_i, \cdot)$ R-integrabile su $[a_2, b_2]$ con integrale $F(x_i)$, esiste un calibro costante $\bar{\delta}_i$ tale che, per ogni p-partizione $\bar{\delta}_i$ -fine $\mathring{\mathcal{P}}_2$ di $[a_2, b_2]$, si ha

$$|S(f(x_i, \cdot), \mathring{\mathcal{P}}_2) - F(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b_1 - a_1)}.$$

Possiamo inoltre assumere che $\bar{\delta}_i \leq \delta$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Scegliamo allora, per ogni $i = 1, \dots, n$, una p-partizione $\bar{\delta}_i$ -fine $\mathring{\mathcal{P}}_2^i$ di $[a_2, b_2]$, e scriviamola esplicitamente:

$$\mathring{\mathcal{P}}_2^i = \{(y_j^i, K_j^i) : j = 1, \dots, m_i\}.$$

Avremo quindi che, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$|F(x_i) - S(f(x_i, \cdot), \mathring{\mathcal{P}}_2^i)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b_1 - a_1)},$$

ossia

$$\left| F(x_i) - \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i, y_j^i) \mu(K_j^i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b_1 - a_1)}.$$

Definiamo ora la seguente p-partizione δ -fine di I :

$$\mathring{\mathcal{P}} = \{(x_i, y_j^i), J_i \times K_j^i : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}.$$

Abbiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left| S(F, \mathring{\mathcal{P}}_1) - \int_I f \right| &\leq |S(F, \mathring{\mathcal{P}}_1) - S(f, \mathring{\mathcal{P}})| + \left| S(f, \mathring{\mathcal{P}}) - \int_I f \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n F(x_i) \mu(J_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i, y_j^i) \mu(J_i \times K_j^i) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| F(x_i) - \sum_{j=1}^{m_i} f(x_i, y_j^i) \mu(K_j^i) \right| \mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b_1 - a_1)} \mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che F è integrabile e

$$\int_{a_1}^{b_1} F = \int_I f.$$

La dimostrazione è quindi completa. ■

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 \sin y$ sul rettangolo $I = [-1, 1] \times [0, \pi]$. Essendo f continua su un compatto, è ivi integrabile, per cui si ha:

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^\pi x^2 \sin y \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 [-\cos y]_0^\pi dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Naturalmente, vale anche la seguente versione del Teorema di Fubini, simmetrica della precedente.

Teorema 66 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul rettangolo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Allora:

- (i) per quasi ogni $y \in [a_2, b_2]$, la funzione $f(\cdot, y)$ è integrabile su $[a_1, b_1]$;
- (ii) la funzione $\int_{a_1}^{b_1} f(x, \cdot) dx$, definita quasi ovunque su $[a_2, b_2]$, è ivi integrabile;
- (iii) si ha:

$$\int_I f = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Come immediata conseguenza, si ha che, se f è integrabile su $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, allora

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

In altri termini, se non vale l'uguaglianza ora scritta, la funzione f non è integrabile su I .

Esempi. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sul rettangolo $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Se $x \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2 + 1},$$

per cui

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Analogamente, si vede che

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4},$$

e se ne deduce che f non è integrabile su I .

Come ulteriore esempio, consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sul rettangolo $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$. In questo caso, se $x \neq 0$, si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy = \left[\frac{-x}{2(x^2 + y^2)} \right]_{y=-1}^{y=1} = 0,$$

per cui

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = 0.$$

Analogamente, si vede che

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = 0.$$

Ciononostante, non si può concludere che f sia integrabile su I . In realtà non lo è proprio. Infatti, se lo fosse, dovrebbe essere integrabile anche sui sottorettangoli, e in particolare su $[0, 1] \times [0, 1]$. Ma, se $x \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy = \left[\frac{-x}{2(x^2 + y^2)} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2x(x^2 + 1)},$$

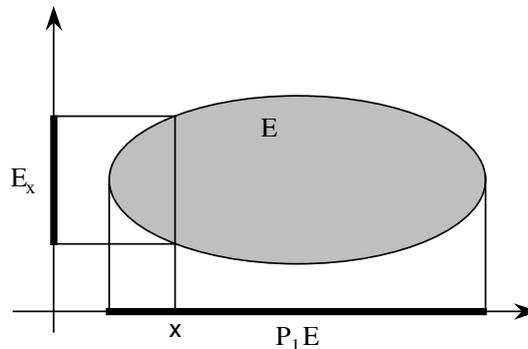
che non è integrabile rispetto a x su $[0, 1]$.

Se la funzione f è definita in un sottoinsieme limitato E di \mathbb{R}^2 , si può applicare il teorema di riduzione alla funzione f_E . Sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rettangolo contenente E . Definiamo le **sezioni** di E :

$$E_x = \{y \in [a_2, b_2] : (x, y) \in E\}, \quad E_y = \{x \in [a_1, b_1] : (x, y) \in E\},$$

e le **proiezioni** di E :

$$P_1E = \{x \in [a_1, b_1] : E_x \neq \emptyset\}, \quad P_2E = \{y \in [a_2, b_2] : E_y \neq \emptyset\}.$$



Possiamo allora riformulare il teorema nella forma seguente.

Teorema 67 Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile sull'insieme limitato E . Allora:

- (i) per quasi ogni $x \in P_1E$, la funzione $f_E(x, \cdot)$ è integrabile sull'insieme E_x ;
- (ii) la funzione $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) dy$, definita quasi ovunque su P_1E , è ivi integrabile;
- (iii) si ha:

$$\int_E f = \int_{P_1E} \left(\int_{E_x} f(x, y) dy \right) dx.$$

Analogamente, la funzione $y \mapsto \int_{E_y} f(x, y) dx$, definita quasi ovunque su P_2E , è ivi integrabile, e si ha:

$$\int_E f = \int_{P_2E} \left(\int_{E_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = |xy|$ sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x^2 \leq y \leq x^2\}.$$

Essendo f continua ed E compatto, si può applicare il teorema; si ha che $P_1E = [0, 1]$ e, per ogni $x \in P_1E$, $E_x = [-x^2, x^2]$. Quindi:

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} |xy| dy \right) dx \\ &= \int_0^1 2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^5 dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Come corollario, otteniamo un metodo per calcolare la misura di un insieme limitato misurabile.

Corollario 11 *Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato misurabile, allora:*

- (i) *per quasi ogni $x \in P_1E$, l'insieme E_x è misurabile;*
- (ii) *la funzione $x \mapsto \mu(E_x)$, definita quasi ovunque su P_1E , è ivi integrabile;*
- (iii) *si ha:*

$$\mu(E) = \int_{P_1E} \mu(E_x) dx.$$

Analogamente, la funzione $y \mapsto \mu(E_y)$, definita quasi ovunque su P_2E , è ivi integrabile, e si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_2E} \mu(E_y) dy.$$

Nel caso di funzioni di più di due variabili, valgono risultati analoghi ai precedenti, con le medesime dimostrazioni. Separate le variabili in due gruppi, e chiamato x il primo gruppo di variabili e y il secondo, valgono esattamente le stesse formule scritte sopra. Inoltre, iterando il procedimento di riduzione, si possono dimostrare, per una funzione di N variabili integrabile su un rettangolo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N],$$

formule del tipo

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_N \cdots \right) dx_2 \right) dx_1.$$

Esempi. 1) Calcoliamo l'area di un cerchio centrato nell'origine di raggio $r > 0$,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Abbiamo che $P_1 E = [-r, r]$ e $E_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Quindi,

$$\mu(E) = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^2 \cos^2 u du = \pi r^2.$$

(Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(x/r)$, ossia $x = r \sin u$.)

2) Calcoliamo il volume di una palla tridimensionale centrata nell'origine di raggio $r > 0$,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Possiamo procedere in due modi, a seconda di come raccogliamo le variabili.

Primo modo. Scriviamo $(x, y, z) = (x, (y, z))$. Abbiamo che $P_1 E = [-r, r]$ e

$$E_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\}, \quad \text{per ogni } x \in [-r, r].$$

Quindi, E_x è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$, la cui area è $\mu(E_x) = \pi(r^2 - x^2)$, e possiamo calcolare

$$\mu(E) = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Secondo modo. Scriviamo $(x, y, z) = ((x, y), z)$. Allora

$$P_1 E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

mentre

$$E_{(x,y)} = \left[-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right], \quad \text{per ogni } (x, y) \in P_1 E.$$

Quindi,

$$\mu(E) = \int_{P_1 E} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Usiamo di nuovo la formula di riduzione sull'insieme $D = P_1 E$. Abbiamo che $P_1 D = [-r, r]$ e $D_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Pertanto,

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_D 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(r^2 - x^2) \cos^2 u du \right) dx = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

(Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(y/\sqrt{r^2 - x^2})$, ossia $y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin u$.)

3) Vogliamo calcolare il volume del tetraedro regolare di lato ℓ . Lo supporremo appoggiato al piano xy , per cui la sua “base” è un triangolo equilatero di lato ℓ , altezza $h = \frac{1}{2}\ell\sqrt{3}$ e area $A = \frac{1}{4}\ell^2\sqrt{3}$. L'altezza del tetraedro E è pertanto

$$H = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ell.$$

Raggruppiamo le variabili come $((x, y), z)$ e proiettiamo sull'asse z , ottenendo $P_2E = \left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\ell\right]$. Per ogni $z \in P_2E$, la sezione E_z è un triangolo equilatero di lato $\ell_z = \ell - \sqrt{\frac{3}{2}}z$ e area

$$\mu(E_z) = \frac{1}{4}\ell_z^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\ell - \sqrt{\frac{3}{2}}z\right)^2.$$

Pertanto,

$$\mu(E) = \int_0^H \mu(E_z) dz = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}\ell} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\ell - \sqrt{\frac{3}{2}}z\right)^2 dz = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3.$$

Nota. Dehn ha dimostrato nel 1902, in risposta al Terzo Problema di Hilbert, che non è possibile tagliare il tetraedro in poliedri più piccoli che, ricombinati assieme, formino un parallelepipedo.

Più in generale, consideriamo ora un “cono” tridimensionale E . Esso è ottenuto prendendo un insieme S , che supponiamo contenuto in $\{(x, y, z) : z = 0\}$ (la “base” di E) e un punto $\mathbf{v} = (0, 0, h)$, con $h > 0$ (il “vertice” di E). L'insieme E è così definito:

$$E = \{(1 - \lambda)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{x} : \lambda \in [0, 1], \mathbf{x} \in S\}.$$

La sua proiezione sull'asse z ci dà il segmento $P_2E = [0, h]$, e per ogni $z \in P_2E$ la sezione E_z ha un'area

$$\mu(E_z) = \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 \mu(E_0) = \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 \mu(S).$$

Quindi il volume del cono E è

$$\mu(E) = \int_{P_2E} \mu(E_z) dz = \int_0^h \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 \mu(S) dz = \frac{1}{3}\mu(S)h,$$

ossia “area della base volte altezza diviso tre”.

30 Cambiamento di variabili nell'integrale

Se $I = [a, b]$ è un intervallo in \mathbb{R} e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile con derivata continua, qualora $f : \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua possiamo scrivere la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

Si noti che $\varphi(I)$ è un intervallo i cui estremi potrebbero non coincidere con $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$. Questo si verifica invece se φ sia strettamente monotona, nel qual caso la formula si può scrivere come

$$\int_{\varphi(I)} f(x) dx = \int_I f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du.$$

Infatti, se φ è strettamente decrescente, si ha che $|\varphi'(u)| = -\varphi'(u)$ e $\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$. Cercheremo ora di estendere tale formula.

Per iniziare, consideriamo il caso in cui f è costante di valore 1, per cui la formula diventa

$$\mu(\varphi(I)) = \int_I |\varphi'(u)| du.$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione lineare, per cui esiste \mathbb{A} , una matrice 2×2 , tale che $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x}$. Supponiamo che \mathbb{A} sia invertibile. Se $I = [0, 1] \times [0, 1]$, allora $\varphi(I)$ è un parallelogramma, la cui area è $|\det \mathbb{A}|$. Si noti che in questo caso la matrice jacobiana di φ è costante, $J\varphi(\mathbf{u}) = \mathbb{A}$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, per cui abbiamo che

$$\mu(\varphi(I)) = \int_I |\det J\varphi(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

Questa formula si estende a un qualsiasi diffeomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$, dove A e B sono due aperti limitati di \mathbb{R}^2 . Se I è un rettangolo contenuto in A , lo si può suddividere in molti piccoli sottorettangoli, su ciascuno dei quali la funzione φ sarà approssimata dalla ben nota formula

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_0) + J\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + r(\mathbf{u}),$$

che ci riporta a un'espressione lineare con $\mathbb{A} = J\varphi(\mathbf{u}_0)$. Si può dimostrare che queste approssimazioni, con un procedimento al limite, forniscono la formula cercata.

Il procedimento descritto sopra si estende a ogni dimensione e si può dimostrare il seguente

Teorema 68 *Sia φ un diffeomorfismo tra due aperti limitati A e $B = \varphi(A)$. Se D è un sottoinsieme misurabile di A , allora $\varphi(D)$ è misurabile, $|\det \varphi'|$ è integrabile su D e si ha:*

$$\mu(\varphi(D)) = \int_D |\det \varphi'(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

Possiamo ora passare al caso generale, con f una funzione non necessariamente costante. Enunciamo il **teorema di cambiamento di variabili** nell'integrale.

Teorema 69 Siano A e B due aperti di \mathbb{R}^N , e $\varphi : A \rightarrow B$ un diffeomorfismo. Siano $D \subseteq A$ e $\varphi(D) \subseteq B$ limitati e misurabili, e $f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è L -integrabile su $\varphi(D)$ se e solo se $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ è L -integrabile su D , nel qual caso si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D f(\varphi(\mathbf{u}))|\det \varphi'(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

Potrebbe essere utile la seguente formula equivalente:

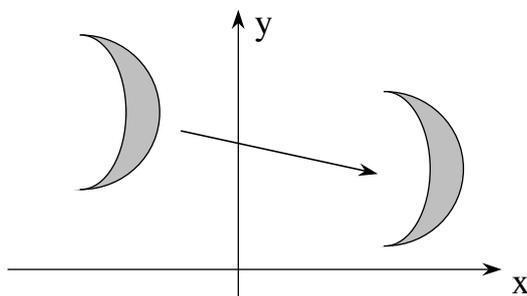
$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(\mathbf{u}))|\det \varphi'(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

31 Alcune trasformazioni utili in \mathbb{R}^2

Ci sono alcune trasformazioni che lasciano invariata la misura di ogni insieme misurabile. Ne consideriamo qui alcune delle più usate nella pratica.

Le traslazioni. Si dice traslazione, per mezzo di un vettore fissato $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, la trasformazione definita da

$$\varphi(u, v) = (u + a_1, v + a_2).$$



Si vede immediatamente che φ è un diffeomorfismo con $\det \varphi' = 1$, per cui, dati un insieme limitato misurabile D e una funzione L -integrabile f su $\varphi(D)$, si ha:

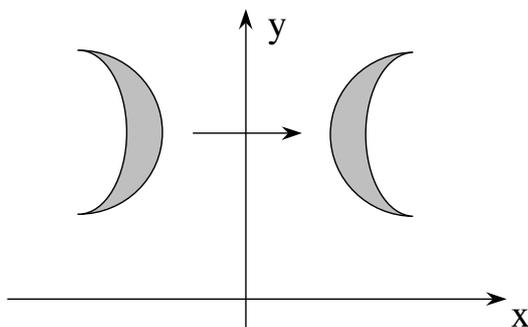
$$\int_{\varphi(D)} f(x, y) dx dy = \int_D f(u + a_1, v + a_2) du dv.$$

Le riflessioni. Una riflessione rispetto ad un asse è definita da:

$$\varphi(u, v) = (-u, v), \quad \text{oppure} \quad \varphi(u, v) = (u, -v).$$

Qui $\det \varphi' = -1$, per cui, ad esempio nel primo caso, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x, y) dx dy = \int_D f(-u, v) du dv.$$

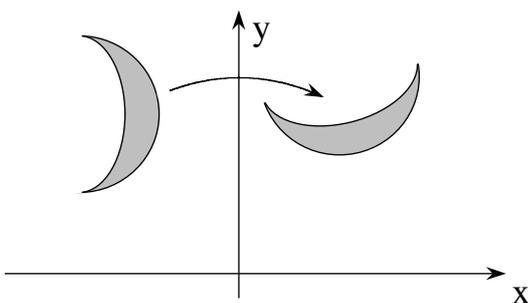


Le rotazioni. Una rotazione attorno all'origine di un angolo fissato α è definita da:

$$\varphi(u, v) = (u \cos \alpha - v \sin \alpha, u \sin \alpha + v \cos \alpha).$$

Si tratta di un diffeomorfismo, con

$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1.$$



Quindi, dati un insieme limitato misurabile D e una funzione L-integrabile f su $\varphi(D)$, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x, y) dx dy = \int_D f(u \cos \alpha - v \sin \alpha, u \sin \alpha + v \cos \alpha) du dv.$$

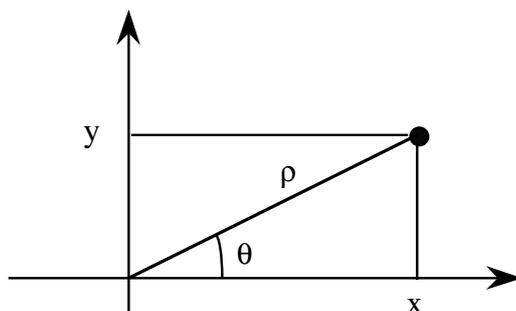
Un altro tipo di trasformazione utile è la funzione $\psi : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

che definisce le note coordinate polari in \mathbb{R}^2 . Preso un sottoinsieme limitato misurabile E di \mathbb{R}^2 , sia B_R una palla aperta di centro l'origine e raggio R che lo contenga. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A =]0, R[\times]0, 2\pi[, \quad B = B_R \setminus ([0, +\infty[\times \{0\}).$$

La funzione $\varphi : A \rightarrow B$ definita da $\varphi(\rho, \theta) = \psi(\rho, \theta)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det \varphi'(\rho, \theta) = \rho$. Possiamo applicare il teorema di



cambiamento di variabili all'insieme $\tilde{E} = E \cap B$. Siccome \tilde{E} e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da E e $\psi^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme trascurabile, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate polari**:

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\psi^{-1}(E)} f(\psi(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Esempio. Sia $f(x, y) = xy$ definita su

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 < 9\}.$$

Facendo il cambiamento di variabili in coordinate polari, si vede che $\psi^{-1}(E) = [0, 3[\times [0, \frac{\pi}{2}]$; per la formula di riduzione di Fubini, possiamo quindi scrivere

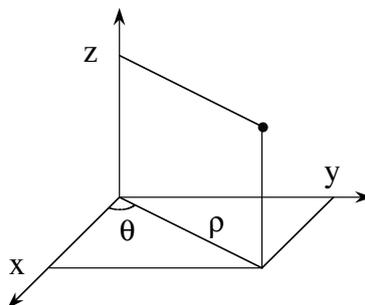
$$\int_E f = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho \right) d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{81}{8}.$$

32 Coordinate cilindriche e sferiche in \mathbb{R}^3

Consideriamo la funzione $\xi : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\xi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z),$$

che definisce le coordinate cilindriche in \mathbb{R}^3 . Preso un sottoinsieme limitato



misurabile E di \mathbb{R}^3 , sia $C_R \times]-H, H[$ un cilindro, avente come base il cerchio

aperto C_R di centro l'origine e raggio R , che lo contenga. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A =]0, R[\times]0, 2\pi[\times]-H, H[, \\ B = (C_R \setminus ([0, +\infty[\times \{0\}) \times]-H, H[.$$

La funzione $\varphi : A \rightarrow B$ definita da $\varphi(\rho, \theta, z) = \xi(\rho, \theta, z)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det \varphi'(\rho, \theta, z) = \rho$. Possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili all'insieme $\tilde{E} = E \cap B$. Siccome \tilde{E} e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da E e $\xi^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme trascurabile, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate cilindriche**:

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\xi^{-1}(E)} f(\xi(\rho, \theta, z)) \rho d\rho d\theta dz .$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale $\int_E f$, dove $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x + y + \sqrt{2}\} .$$

Passando a coordinate cilindriche, notiamo che

$$\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + \sqrt{2} \geq 0 ,$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$ e ogni $\rho \in [0, 1]$. Facendo il cambio di variabili e usando Fubini, si ha:

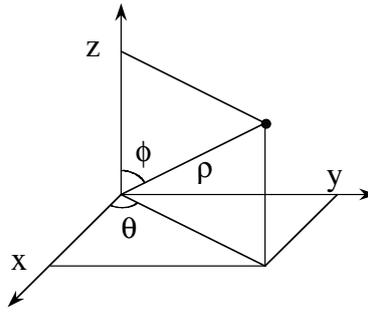
$$\begin{aligned} \int_E (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_{\xi^{-1}(E)} \rho^3 dz d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + \sqrt{2}} \rho^3 dz \right) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + \sqrt{2}) d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{2} d\rho \\ &= \frac{\pi \sqrt{2}}{2} . \end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione $\sigma : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) ,$$

che definisce le coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 . Preso un sottoinsieme limitato misurabile E di \mathbb{R}^3 , sia B_R una palla aperta tridimensionale di centro l'origine e raggio R , che lo contenga. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A =]0, R[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[, \quad B = B_R \setminus ([0, +\infty[\times \{0\} \times \mathbb{R}) .$$



La funzione $\varphi : A \rightarrow B$ definita da $\varphi(\rho, \theta, \phi) = \sigma(\rho, \theta, \phi)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det \varphi'(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin \phi$. Possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili a $\tilde{E} = E \cap B$. Siccome \tilde{E} e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da E e $\sigma^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme trascurabile, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate sferiche**:

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\sigma^{-1}(E)} f(\sigma(\rho, \theta, \phi)) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

Esempio. Calcoliamo il volume dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_E 1 dx dy dz \\ &= \int_{\sigma^{-1}(E)} \rho \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \phi d\theta \right) d\phi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin \phi d\phi \right) d\rho \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^1 \rho d\rho \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

33 Integrale su sottoinsiemi non limitati

Useremo la notazione

$$B[0, r] = [-r, r] \times [-r, r] \times \cdots \times [-r, r] \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^N , non necessariamente limitato, e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata tale che

$$f(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ per ogni } \mathbf{x} \in E.$$

Se f è integrabile su ciascun insieme limitato $E \cap B[0, r]$, con $r > 0$, si definisce

$$\int_E f = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B[0, r]} f.$$

Si noti che il limite esiste sempre, siccome la funzione $r \mapsto \int_{E \cap B[0, r]} f$ è crescente, essendo $f \geq 0$. Inoltre, il risultato non cambia se al posto di $B[0, r]$ si considera la palla euclidea $B(0, r)$, o una qualsiasi famiglia crescente di insiemi che invadono \mathbb{R}^2 . Qualora tale limite risulti finito, la funzione f si dirà **integrabile** (o **L-integrabile**) su E .

Nel caso in cui la funzione assuma anche valori negativi, procediamo in questo modo. Definiamo le funzioni $f^\pm : E \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \max\{-f(\mathbf{x}), 0\},$$

per cui $f(\mathbf{x}) = f^+(\mathbf{x}) - f^-(\mathbf{x})$. Si noti che $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Se ben definito, si pone quindi

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

In tal caso, f si dirà **L-integrabile**. Osserviamo infatti che $|f(\mathbf{x})| = f^+(\mathbf{x}) + f^-(\mathbf{x})$, quindi se f^+ e f^- sono integrabili, avremo anche

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^-.$$

Si dimostra senza grosse difficoltà che l'insieme delle funzioni L-integrabili è uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso che conserva l'ordine.

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice **misurabile** se $E \cap B[0, r]$ è misurabile, per ogni $r > 0$. In tal caso, si pone

$$\mu(E) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mu(E \cap B[0, r]).$$

Si noti che il valore $\mu(E)$ può essere in alcuni casi $+\infty$. Esso è finito se e solo se la funzione costante 1 è L-integrabile su E , ossia la funzione caratteristica di E è L-integrabile su \mathbb{R}^N . Le proprietà degli insiemi limitati misurabili si estendono facilmente agli insiemi illimitati. In particolare, sono misurabili tutti gli insiemi aperti e tutti i chiusi.

Anche il **teorema di riduzione** di G. Fubini si estende a funzioni definite su un sottoinsieme E di \mathbb{R}^N non necessariamente limitato. Sia $N = N_1 + N_2$ e scriviamo $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, consideriamo le **sezioni** di E :

$$E_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_2} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}, \quad E_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_1} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\},$$

e le **proiezioni** di E :

$$P_1E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_1} : E_{\mathbf{x}} \neq \emptyset\}, \quad P_2E = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_2} : E_{\mathbf{y}} \neq \emptyset\},$$

Possiamo allora riformulare il teorema nella forma seguente.

Teorema 70 *Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione L -integrabile sull'insieme E . Allora:*

- (i) *per quasi ogni $\mathbf{x} \in P_1E$, la funzione $f(\mathbf{x}, \cdot)$ è L -integrabile sull'insieme $E_{\mathbf{x}}$;*
- (ii) *la funzione $\mathbf{x} \mapsto \int_{E_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$, definita quasi ovunque su P_1E , è ivi L -integrabile;*
- (iii) *si ha:*

$$\int_E f = \int_{P_1E} \left(\int_{E_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Analogamente, la funzione $\mathbf{y} \mapsto \int_{E_{\mathbf{y}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$, definita quasi ovunque su P_2E , è ivi L -integrabile, e si ha:

$$\int_E f = \int_{P_2E} \left(\int_{E_{\mathbf{y}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Corollario 12 *Sia E un insieme misurabile. Allora E ha misura finita se e solo se:*

- (i) *per quasi ogni $\mathbf{x} \in P_1E$, l'insieme $E_{\mathbf{x}}$ è misurabile e ha misura finita;*
- (ii) *la funzione $\mathbf{x} \mapsto \mu(E_{\mathbf{x}})$, definita quasi ovunque su P_1E , è ivi L -integrabile;*
- (iii) *si ha:*

$$\mu(E) = \int_{P_1E} \mu(E_{\mathbf{x}}) d\mathbf{x}.$$

Con enunciato simmetrico, se E ha misura finita, si ha pure

$$\mu(E) = \int_{P_2E} \mu(E_{\mathbf{y}}) d\mathbf{y}.$$

La **formula di cambiamento di variabili nell'integrale** si estende anch'essa ad insiemi non limitati, con enunciato analogo.

Teorema 71 *Siano φ un diffeomorfismo tra due aperti A e $B = \varphi(A)$ di \mathbb{R}^N , D un sottoinsieme misurabile di A e $f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è L -integrabile su $\varphi(D)$ se e solo se $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ è L -integrabile su D , nel qual caso si ha:*

$$\int_{\varphi(D)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D f(\varphi(\mathbf{u}))|\det \varphi'(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

Si possono fare le stesse considerazioni per quanto riguarda i cambiamenti di variabili in coordinate polari in \mathbb{R}^2 o in coordinate cilindriche o sferiche in \mathbb{R}^3 .

Esempio 1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ e $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_1^{+\infty} \rho^{1-2\alpha} d\rho. \end{aligned}$$

Si vede quindi che f è integrabile su E se e solo se $\alpha > 1$, nel qual caso l'integrale vale $\frac{\pi}{\alpha-1}$.

Esempio 2. Calcoliamo la misura tridimensionale dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Usando Fubini, raggruppando le variabili (y, z) abbiamo

$$\mu(E) = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2} dx = \pi.$$

Esempio 3. Consideriamo la funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e facciamo un cambiamento di variabili in coordinate polari:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Notiamo che, usando il Teorema di Fubini, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2, \end{aligned}$$

per cui troviamo il seguente importante risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Terminiamo con la **proprietà di additività** dell'integrale.

Teorema 72 Siano E_1, \dots, E_n sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^N , a due a due non sovrapposti (ossia $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ se $i \neq j$), la cui unione è un insieme E . Allora $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è L -integrabile su E se e solo se f è L -integrabile su ciascuno degli E_1, \dots, E_n , e in tal caso, si ha

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \dots + \int_{E_n} f.$$

34 Integrale su una M -superficie

Sia $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una M -superficie, con $1 \leq M \leq N$. Possiamo considerare, al variare degli indici i_1, \dots, i_M , le matrici $M \times M$ che si ottengono selezionando dalla matrice jacobiana $J\sigma(\mathbf{u})$ le corrispondenti righe

$$\sigma'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) & \dots & \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_M}(\mathbf{u}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) & \dots & \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_M}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

Definiamo, per ogni $\mathbf{u} \in I$, i vettori $\binom{N}{M}$ -dimensionali

$$\Sigma(\mathbf{u}) = (\det \sigma'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{u}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}.$$

Indicheremo con $\|\Sigma(\mathbf{u})\|$ la norma euclidea di $\Sigma(\mathbf{u})$:

$$\|\Sigma(\mathbf{u})\| = \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} (\det \sigma'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{u}))^2 \right]^{1/2}.$$

Definizione 24 La funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile sulla M -superficie $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ se $(f \circ \sigma) \|\Sigma\|$ è integrabile su I . In tal caso, si pone

$$\int_{\sigma} f = \int_I f(\sigma(\mathbf{u})) \|\Sigma(\mathbf{u})\| d\mathbf{u}.$$

Ad esempio, ogni funzione continua f sarà integrabile su σ .

Nel caso $M = 1$, abbiamo una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ , si ha:

$$\int_{\sigma} f = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

Se $M = 2$ e $N = 3$, abbiamo una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ , si ha:

$$\int_{\sigma} f = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

Definizione 25 Due M -superfici $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subseteq I$, $B \subseteq J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono trascurabili e, per ogni $\mathbf{u} \in A$, $\sigma(\mathbf{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\mathbf{u}))$.

L'integrale non differisce per M -superfici equivalenti.

Teorema 73 Se σ e $\tilde{\sigma}$ sono due M -superfici equivalenti, si ha:

$$\int_{\sigma} f = \int_{\tilde{\sigma}} f.$$

Dimostrazione. Con le notazioni introdotte in precedenza, essendo $\sigma(\mathbf{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\mathbf{u}))$ con $\varphi : A \rightarrow B$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{u}) &= (\det \sigma'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{u}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \\ &= (\det (\tilde{\sigma}'_{(i_1, \dots, i_M)}(\varphi(\mathbf{u})) \varphi'(\mathbf{u})))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \\ &= (\det \tilde{\sigma}'_{(i_1, \dots, i_M)}(\varphi(\mathbf{u})))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \det \varphi'(\mathbf{u}) \\ &= \tilde{\Sigma}(\varphi(\mathbf{u})) \det \varphi'(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Pertanto, per il teorema di cambiamento di variabili, essendo $I \setminus A$ e $J \setminus B$ trascurabili, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f &= \int_A f(\sigma(\mathbf{u})) \|\Sigma(\mathbf{u})\| d\mathbf{u} \\ &= \int_A f(\tilde{\sigma}(\varphi(\mathbf{u}))) \|\tilde{\Sigma}(\varphi(\mathbf{u}))\| |\det \varphi'(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \\ &= \int_B f(\tilde{\sigma}(\mathbf{v})) \|\tilde{\Sigma}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} = \int_{\tilde{\sigma}} f. \end{aligned}$$

■

Come vedremo in seguito, non sempre due M -superfici aventi lo stesso supporto sono equivalenti. Introduciamo una classe particolare di M -superfici per le quali questo inconveniente non si verifica.

Definizione 26 Una M -superficie $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una **M -parametrizzazione** di un insieme \mathcal{M} se è regolare, iniettiva su \mathring{I} , e $\sigma(I) = \mathcal{M}$. Diremo che un sottoinsieme di \mathbb{R}^N è **M -parametrizzabile** se esiste una sua M -parametrizzazione.

Esempi. La circonferenza $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è parametrizzabile e $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, ne è una parametrizzazione.

Una parametrizzazione della sfera $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è, ad esempio, $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

Teorema 74 Due M -parametrizzazioni di uno stesso insieme sono sempre equivalenti.

Se \mathcal{M} è un insieme M -parametrizzabile, possiamo definire l'integrale di f su \mathcal{M} ponendolo uguale a $\int_{\sigma} f$, dove σ è una qualunque parametrizzazione di \mathcal{M} . Lo denoteremo con

$$\int_{\mathcal{M}} f d\mu_M, \quad \text{oppure} \quad \int_{\mathcal{M}} f(x) d\mu_M(x).$$

Se $M = N$, si riottiene l'integrale usuale, ossia $\int_{\mathcal{M}} f(x) dx$.

35 Misura M -dimensionale

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in accordo con l'idea fisica del moto di una particella lungo un percorso descritto dalla funzione σ , in questo caso l'integrale di linea si chiama **lunghezza** (o misura curvilinea) della curva σ , e si scrive:

$$\iota_1(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

Esempio. Sia $\sigma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$. Il suo supporto è un arco di parabola, e la sua lunghezza è data da:

$$\begin{aligned} \iota_1(\sigma) &= \int_0^b \sqrt{1 + (2t)^2} dt \\ &= \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(2b)} \frac{1}{2} (\cosh u)^2 du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u + \sinh u \cosh u}{2} \right]_0^{\sinh^{-1}(2b)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sinh^{-1}(2b) + 2b\sqrt{1 + 4b^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \ln \left(2b + \sqrt{1 + 4b^2} \right) + \frac{b}{2} \sqrt{1 + 4b^2}. \end{aligned}$$

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in questo caso si chiama **area** (o misura superficiale) della superficie σ il seguente integrale:

$$\iota_2(\sigma) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

Nel caso in cui la superficie risulti essere una 2-parametrizzazione di un certo insieme, questo integrale è il flusso di un campo di vettori che in ogni punto della superficie coincide con il versore normale.

Esempio. Sia $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi).$$

Il suo supporto è una sfera di raggio R , e la sua area è data da:

$$\begin{aligned} \iota_2(\sigma) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{(R^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta)^2 + (R^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta)^2 + (R^2 \sin \phi \cos \theta)^2} d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \phi d\phi d\theta \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

In generale, nel caso in cui f è costantemente uguale a 1 abbiamo la seguente

Definizione 27 Si dice **misura M -superficiale** di una M -superficie $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ il seguente integrale:

$$\iota_M(\sigma) = \int_I \|\Sigma(\mathbf{u})\| d\mathbf{u}.$$

Come ragionevolmente ci si aspetta, da quanto visto sopra segue immediatamente che due M -superfici equivalenti hanno sempre la stessa misura M -superficiale.

Esempio. Le due curve $\sigma, \tilde{\sigma} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite da

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \tilde{\sigma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)),$$

pur avendo lo stesso supporto, non sono equivalenti. Infatti, come facilmente si vede, $\iota_1(\sigma) = 2\pi$ mentre $\iota_1(\tilde{\sigma}) = 4\pi$.

Alla luce di quanto sopra, è possibile dare la seguente

Definizione 28 Si chiama **misura M -dimensionale** di un insieme M -parametrizzabile $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ la misura M -superficiale di una qualunque sua M -parametrizzazione.

Nei casi $M = 1, 2$, la misura M -dimensionale di \mathcal{M} si chiama spesso **lunghezza** o **area** di \mathcal{M} , rispettivamente. Si potrà parlare, ad esempio, di lunghezza di una circonferenza e di area di una sfera.

Se $M = N$, si può verificare che la misura N -dimensionale dell'insieme \mathcal{M} coincide con la misura usuale che abbiamo trattato nella prima parte di queste note.

36 Lunghezza e area

Consideriamo dapprima una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Per ogni partizione \mathcal{P} dell'intervallo $[a, b]$ del tipo

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b,$$

calcoliamo la lunghezza della poligonale che congiunge i punti $\sigma(a_j)$, ossia

$$\ell(\sigma, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n \|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\|.$$

Risulta abbastanza intuitivo il fatto che queste lunghezze siano una buona approssimazione della lunghezza della curva σ , qualora i punti della partizione siano presi sufficientemente vicini l'uno all'altro. Si può effettivamente dimostrare il seguente risultato.

Teorema 75 *La lunghezza della curva σ è ottenuta come*

$$\iota_1(\sigma) = \sup \{ \ell(\sigma, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a, b] \}.$$

Dimostrazione. Per ogni partizione \mathcal{P} di $[a, b]$ si ha che

$$\|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\| = \left\| \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sigma'(t) dt \right\| \leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|\sigma'(t)\| dt,$$

quindi

$$\ell(\sigma, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n \|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

Allora, anche

$$\sup \{ \ell(\sigma, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition of } [a, b] \} \leq \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

Dimostriamo ora anche la disuguaglianza opposta. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Siccome $\sigma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continua, per il Teorema di Heine essa è uniformemente continua, per cui esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|s - t| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|\sigma'(s) - \sigma'(t)\| \leq \varepsilon.$$

Sia \mathcal{P} una partizione di $[a, b]$ tale che $a_j - a_{j-1} \leq \delta$, per ogni $j = 1, \dots, m$.

Se $t \in [a_{j-1}, a_j]$, allora $\|\sigma'(t) - \sigma'(a_j)\| \leq \varepsilon$, quindi $\|\sigma'(t)\| \leq \|\sigma'(a_j)\| + \varepsilon$, e pertanto

$$\begin{aligned} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|\sigma'(t)\| dt &\leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} (\|\sigma'(a_j)\| + \varepsilon) dt \\ &= \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|\sigma'(a_j)\| dt + \varepsilon(a_j - a_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sigma'(a_j) dt \right\| + \varepsilon(a_j - a_{j-1}) \\ &\leq \left\| \int_{a_{j-1}}^{a_j} (\sigma'(a_j) - \sigma'(t)) dt \right\| + \left\| \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sigma'(t) dt \right\| + \varepsilon(a_j - a_{j-1}) \\ &\leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|\sigma'(a_j) - \sigma'(t)\| dt + \|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\| + \varepsilon(a_j - a_{j-1}) \\ &\leq \varepsilon(a_j - a_{j-1}) + \|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\| + \varepsilon(a_j - a_{j-1}). \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt &= \sum_{j=1}^m \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|\sigma'(t)\| dt \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\|\sigma(a_j) - \sigma(a_{j-1})\| + 2\varepsilon(a_j - a_{j-1}) \right) \\ &= \ell(\sigma, \mathcal{P}) + 2\varepsilon(b - a) \\ &\leq \sup \{ \ell(\sigma, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition of } [a, b] \} + 2\varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario, ne segue la disuguaglianza

$$\int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \leq \sup \{ \ell(\sigma, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partition of } [a, b] \},$$

e la dimostrazione è completa. ■

Potremmo ora provare a vedere se una costuzione simile possa essere fatta anche per le superfici. Sorprendentemente, ciò non è possibile! Cercheremo di capirne il motivo, illustrando il seguente esempio dovuto a Schwarz.

Consideriamo la superficie laterale di un cilindro con base circolare di raggio r e altezza h . La parametrizziamo in coordinate cilindriche, per mezzo della funzione $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

La sua area, come facilmente si vede, è uguale a $2\pi r h$.

La “lanterna di Schwarz” è un poliedro, avente $4mn$ facce triangolari, inscritto nel suddetto cilindro. I vertici del poliedro corrispondono ai punti che si ottengono suddividendo il dominio in nm sottorettangoli

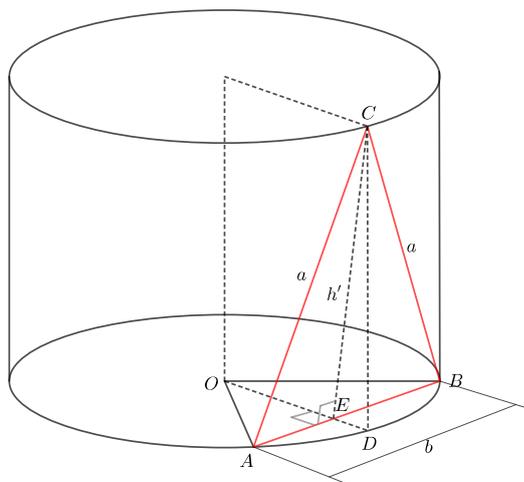
$$\left[(j-1) \frac{2\pi}{m}, j \frac{2\pi}{m} \right] \times \left[(k-1) \frac{h}{n}, k \frac{h}{n} \right], \quad \text{con } j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n,$$

e poi dividendo ciascuno di essi, per mezzo delle loro due diagonali, in quattro triangoli uguali. Indicheremo con $A(m, n)$ l’area di questo poliedro.

Usando semplici formule geometriche si vede che ciascuna delle $4mn$ facce del poliedro è un triangolo isoscele avente base di lunghezza

$$b = 2r \sin \left(\frac{\pi}{m} \right),$$

e altezza di lunghezza



$$h' = \sqrt{r^2 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) \right]^2 + \left(\frac{h}{2n} \right)^2}.$$

Si veda la figura:

$$AE = r \sin \left(\frac{\pi}{m} \right), \quad OE = r \cos \left(\frac{\pi}{m} \right), \quad ED = r \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) \right), \quad CD = \frac{h}{2n}.$$

Pertanto, la somma delle aree dei $4mn$ triangoli vale

$$A(m, n) = 4mn \frac{bh'}{2} = 2\pi r \frac{\sin \left(\frac{\pi}{m} \right)}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{h^2 + \left[2 \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{m} \right)}{\left(\frac{\pi}{m} \right)^2} \right]^2 \left(\frac{\pi^2 rn}{m^2} \right)^2}.$$

C'è in questa formula un termine “scomodo”: $\left(\frac{\pi^2 rn}{m^2} \right)^2$. Se $m \rightarrow +\infty$ e $n \rightarrow +\infty$, non è detto che esso tenda a zero, come si vorrebbe, per avere che $A(m, n) \rightarrow 2\pi rh$. Anzi, possiamo affermare che

il limite di $A(m, n)$ per $(m, n) \rightarrow (+\infty, +\infty)$ non esiste!

Si noti ad esempio che $A(m, m) \rightarrow 2\pi rh$, mentre $A(m, m^3) \rightarrow +\infty$ e, per ogni $\ell \geq 2\pi rh$, esiste una successione $(n_m)_m$ tale che $n_m \rightarrow +\infty$ e $A(m, n_m) \rightarrow \ell$.

37 Uno strano prodotto

Consideriamo le “proiezioni” in \mathbb{R}^N . Come abbiamo già visto, si tratta delle funzioni $p_m : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$p_m(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_m.$$

In questa parte del corso useremo però una notazione diversa: invece di p_m , scriveremo dx_m .

Ad esempio, la nota formula per il differenziale

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{m=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) h_m,$$

dove $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ è un qualsiasi vettore di \mathbb{R}^N , potrà essere scritta come

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{m=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) dx_m(\mathbf{h}),$$

o brevemente come

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{m=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) dx_m.$$

Abbiamo qui un primo esempio di quella che chiameremo “forma differenziale”.

Introduciamo ora un'operazione tra i dx_m che ha l'aspetto di un prodotto, e che denotiamo con il simbolo \wedge . Senza entrare troppo nel merito della questione teorica, ci limiteremo a evidenziarne le proprietà. La principale caratteristica di questo prodotto è di essere antisimmetrico (o alternante): si ha

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Possiamo moltiplicare diverse volte questi oggetti, con la regola generale che, quando si scambiano due di essi, il risultato cambia di segno:

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_i \dots \wedge dx_j \dots \wedge dx_{i_M} = -dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_j \dots \wedge dx_i \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Si noti che, se due indici dovessero coincidere, allora

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_i \dots \wedge dx_i \dots \wedge dx_{i_M} = 0.$$

Risulta allora chiaro che basterà considerare i prodotti con indici in ordine strettamente crescente, ossia

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}, \text{ con } 1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N,$$

in quanto tutti gli altri o sono nulli o si possono ricondurre a questi con un riordinamento dei fattori, eventualmente cambiando il segno.

Analizziamo ad esempio il caso $N = 3$. Qui abbiamo dx_1 , dx_2 e dx_3 . Se prendo due di essi con gli indici in ordine strettamente crescente ottengo

$$dx_1 \wedge dx_2, \quad dx_1 \wedge dx_3, \quad dx_2 \wedge dx_3.$$

Ci sono anche

$$dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_2, \quad dx_3 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_3, \quad dx_3 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_3,$$

mentre

$$dx_1 \wedge dx_1 = dx_2 \wedge dx_2 = dx_3 \wedge dx_3 = 0.$$

C'è un unico prodotto di tre elementi con indici in ordine strettamente crescente, e cioè

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Per quanto riguarda gli altri prodotti di tre elementi, abbiamo

$$dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 = dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

$$dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

mentre tutti quelli con due o tre indici ripetuti valgono 0.

38 Forme differenziali in \mathbb{R}^N

Sia U un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N , e sia $M \geq 1$ un numero naturale.

Chiameremo **forma differenziale di grado M** (o M -forma differenziale) una funzione definita su U da un'espressione del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Le funzioni $f_{i_1 \dots i_M} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sono le “componenti” di ω . Diremo che ω è di classe C^1 se lo sono tutte le sue componenti. Si noti che $\omega(\mathbf{x})$ è determinata dal vettore $\binom{N}{M}$ -dimensionale

$$F(\mathbf{x}) = (f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}.$$

Chiameremo inoltre 0-forma differenziale una qualunque funzione definita su U a valori in \mathbb{R} .

Si può definire la somma di due M -forme differenziali: se ω è come sopra e $\tilde{\omega}$, anch'essa definita su U , è del tipo

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} g_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

si definisce in modo naturale $\omega + \tilde{\omega}$ come segue:

$$(\omega + \tilde{\omega})(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} (f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) + g_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x})) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$, si definisce $c\omega$, il prodotto dello scalare c per la M -forma differenziale ω , nel modo seguente:

$$(c\omega)(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} cf_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Con queste definizioni, l'insieme delle forme differenziali di grado M risulta essere uno spazio vettoriale.

Vediamo da vicino il caso $N = 3$. Consideriamo un sottoinsieme aperto U di \mathbb{R}^3 . Se indichiamo con ω_M una M -forma differenziale, avremo, nei casi $M = 1, 2, 3$, le seguenti possibilità:

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3, \\ \omega_2(\mathbf{x}) &= f_{12}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 + f_{13}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_3 + f_{23}(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3, \\ \omega_3(\mathbf{x}) &= f_{123}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Si noti che $\omega_1(\mathbf{x})$ e $\omega_2(\mathbf{x})$ sono determinate dai vettori tridimensionali $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$ e $G(\mathbf{x}) = (f_{12}(\mathbf{x}), f_{13}(\mathbf{x}), f_{23}(\mathbf{x}))$, rispettivamente.

39 Prodotto esterno

Date due forme differenziali ω e $\tilde{\omega}$, entrambe definite su U , di grado M e \tilde{M} , rispettivamente, vogliamo definire la forma differenziale $\omega \wedge \tilde{\omega}$, di grado $M + \tilde{M}$, che si dice **prodotto esterno** di ω e $\tilde{\omega}$. Se

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N} g_{j_1 \dots j_{\tilde{M}}}(\mathbf{x}) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{\tilde{M}}},$$

si pone

$$(\omega \wedge \tilde{\omega})(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N}} f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) g_{j_1 \dots j_{\tilde{M}}}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{\tilde{M}}}.$$

Di solito si omette il simbolo \wedge qualora una delle due è una 0-forma differenziale, in quanto il prodotto esterno assomiglia, in questo caso, al prodotto per uno scalare. Si noti che nella sommatoria saranno nulli tutti gli elementi in cui un indice compare due volte. Vediamo ora alcune proprietà.

Proposizione. Se $\omega, \tilde{\omega}, \tilde{\tilde{\omega}}$ sono tre forme differenziali di grado $M, \tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}$, rispettivamente, allora:

$$\tilde{\omega} \wedge \omega = (-1)^{M\tilde{M}} \omega \wedge \tilde{\omega},$$

$$(\omega \wedge \tilde{\omega}) \wedge \tilde{\tilde{\omega}} = \omega \wedge (\tilde{\omega} \wedge \tilde{\tilde{\omega}});$$

se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$(c\omega) \wedge \tilde{\omega} = \omega \wedge (c\tilde{\omega}) = c(\omega \wedge \tilde{\omega});$$

inoltre, nel caso in cui $M = \tilde{M}$, si ha

$$(\omega + \tilde{\omega}) \wedge \tilde{\tilde{\omega}} = (\omega \wedge \tilde{\tilde{\omega}}) + (\tilde{\omega} \wedge \tilde{\tilde{\omega}}),$$

$$\tilde{\tilde{\omega}} \wedge (\omega + \tilde{\omega}) = (\tilde{\tilde{\omega}} \wedge \omega) + (\tilde{\tilde{\omega}} \wedge \tilde{\omega}).$$

Nel caso $N = 3$, se ω_1 e $\tilde{\omega}_1$ sono due 1-forme differenziali,

$$\omega_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3,$$

$$\tilde{\omega}_1(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) dx_1 + g_2(\mathbf{x}) dx_2 + g_3(\mathbf{x}) dx_3,$$

individuate dai due campi di vettori

$$F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})),$$

$$G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x})),$$

con qualche calcolo si ottiene:

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1)(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + (f_1(\mathbf{x})g_3(\mathbf{x}) - f_3(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + (f_2(\mathbf{x})g_3(\mathbf{x}) - f_3(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x})) dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Se invece ω_1 è una 1-forma differenziale e $\tilde{\omega}_2$ è una 2-forma differenziale,

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x})dx_1 + f_2(\mathbf{x})dx_2 + f_3(\mathbf{x})dx_3, \\ \tilde{\omega}_2(\mathbf{x}) &= g_{12}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 + g_{13}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_3 + g_{23}(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3,\end{aligned}$$

si ha:

$$(\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_2)(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x})g_{23}(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})g_{13}(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})g_{12}(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Osserviamo adesso che una scelta più opportuna dell'ordine dei prodotti a due a due dei dx_1, dx_2, dx_3 risulta essere questa:

$$dx_2 \wedge dx_3, \quad dx_3 \wedge dx_1, \quad dx_1 \wedge dx_2.$$

Infatti, se rivediamo le operazioni fatte sopra con questa nuova scelta, si ha

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1)(\mathbf{x}) &= (f_2(\mathbf{x})g_3(\mathbf{x}) - f_3(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x})) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + (f_3(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})g_3(\mathbf{x})) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + (f_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_2,\end{aligned}$$

che è la 2-forma differenziale individuata dal campo di vettori

$$F \times G = (f_2g_3 - f_3g_2, f_3g_1 - f_1g_3, f_1g_2 - f_2g_1),$$

il *prodotto vettoriale* tra di due campi di vettori F e G . Inoltre, con la nuova scelta, riscrivendo la 2-forma $\tilde{\omega}_2$ come

$$\tilde{\omega}_2(\mathbf{x}) = \tilde{g}_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + \tilde{g}_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + \tilde{g}_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2,$$

con campo di vettori associato

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = (\tilde{g}_1(\mathbf{x}), \tilde{g}_2(\mathbf{x}), \tilde{g}_3(\mathbf{x})),$$

abbiamo che

$$(\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_2)(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x})\tilde{g}_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})\tilde{g}_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})\tilde{g}_3(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

che è la 3-forma differenziale individuata dalla funzione

$$F \cdot \tilde{G} = f_1\tilde{g}_1 + f_2\tilde{g}_2 + f_3\tilde{g}_3,$$

il *prodotto scalare* tra di due campi di vettori F e \tilde{G} .

40 Differenziale esterno

Data una M -forma differenziale ω di classe C^1 , vogliamo definire la forma differenziale $d_{ex}\omega$, di grado $M + 1$, che si dice **differenziale esterno** di ω .

Se ω è una 0-forma differenziale, $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$, il suo differenziale esterno $d_{ex}\omega(\mathbf{x})$ non sarà altro che il differenziale

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) dx_m.$$

Nel caso generale, se

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

poniamo

$$d_{ex}\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} df_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

o, equivalentemente,

$$d_{ex}\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_{i_1 \dots i_M}}{\partial x_m}(\mathbf{x}) dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Nel seguito, per comodità di scrittura, scriveremo sempre $d\omega$ al posto di $d_{ex}\omega$. Vediamo alcune proprietà del differenziale esterno.

Proposizione. Se ω e $\tilde{\omega}$ sono due forme differenziali di classe C^1 , di grado M e \tilde{M} , rispettivamente, si ha:

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^M \omega \wedge d\tilde{\omega};$$

se $M = \tilde{M}$ e $c \in \mathbb{R}$, allora

$$d(\omega + \tilde{\omega}) = d\omega + d\tilde{\omega},$$

$$d(c\omega) = c d\omega;$$

se ω è di classe C^2 , allora

$$d(d\omega) = 0.$$

Per quanto riguarda l'ultima uguaglianza, abbiamo:

$$d(d\omega)(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_M}}{\partial x_m}(\mathbf{x}) dx_{k,m,i_1, \dots, i_M}.$$

Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_M}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial f_{i_1 \dots i_M}}{\partial x_k}$$

e del fatto che $dx_k \wedge dx_m = -dx_m \wedge dx_k$, si vede che gli addendi delle sommatorie si eliminano a due a due, per cui si ha $d(d\omega)(\mathbf{x}) = 0$.

Nel caso $N = 3$, se abbiamo una 0-forma differenziale $\omega_0 = f : U \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$d\omega_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) dx_3.$$

Si tratta della 1-forma differenziale individuata dal campo di vettori gradiente

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Partendo da una 1-forma differenziale

$$\omega_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3,$$

si ha

$$\begin{aligned} d\omega_1(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Se denotiamo con $F = (f_1, f_2, f_3)$ il campo di vettori individuato da ω_1 , ponendo

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right),$$

detto “rotore” di F , otteniamo il campo di vettori individuato da $d\omega_1$.

Partendo invece da una 2-forma differenziale

$$\omega_2(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + g_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + g_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2,$$

si ha

$$d\omega_2(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Se $G = (g_1, g_2, g_3)$ denota il campo di vettori individuato da ω_2 , ponendo

$$\nabla \cdot G = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3},$$

detta “divergenza” di G , abbiamo la funzione individuata da $d\omega_2$.

Le proprietà del prodotto esterno e del differenziale esterno permettono di dimostrare alcune formule in cui appaiono il gradiente, il rotore o la divergenza.

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, abbiamo ad esempio le seguenti:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla f) &= 0, \\ \nabla \cdot (\nabla \times F) &= 0, \\ \nabla(f\tilde{f}) &= \tilde{f}(\nabla f) + f(\nabla \tilde{f}), \\ \nabla \times (fF) &= (\nabla f) \times F + f(\nabla \times F), \\ \nabla \cdot (fG) &= (\nabla f) \cdot G + f(\nabla \cdot G), \\ \nabla \cdot (F \times G) &= (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G).\end{aligned}$$

41 Integrale di una forma differenziale

Vogliamo ora definire la nozione di integrale di una M -forma differenziale su una M -superficie. Supponiamo di avere una M -forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

definita su un sottoinsieme U di \mathbb{R}^N contenente il supporto di una M -superficie $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $1 \leq M \leq N$.

Si ricordi che $\omega(\mathbf{x})$ è determinata dal vettore $\binom{N}{M}$ -dimensionale

$$F(\mathbf{x}) = (f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}.$$

Inoltre, per ogni $\mathbf{u} \in I$, abbiamo definito il vettore $\binom{N}{M}$ -dimensionale

$$\Sigma(\mathbf{u}) = (\det \sigma'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{u}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}.$$

Definizione. Diremo che la M -forma differenziale ω è integrabile sulla M -superficie $\sigma : I \rightarrow U$ se $(F \circ \sigma) \cdot \Sigma$ è integrabile su I . In tal caso, si pone

$$\int_{\sigma} \omega = \int_I F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \Sigma(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Ad esempio, ω sarà integrabile su σ qualora tutte le sue componenti siano funzioni continue.

Vediamo il significato della definizione data quando $N = 3$. Se $M = 1$, $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva e ω è una 1-forma differenziale:

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + F_3(\mathbf{x}) dx_3.$$

Si ha:

$$\int_{\sigma} \omega = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

Questa quantità si chiama **integrale di linea**⁶ del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ lungo la curva σ , e si indica con il simbolo

$$\int_{\sigma} F \cdot d\ell.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale di linea del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ lungo la curva $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Si ha:

$$\int_{\sigma} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} [(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + t^2] dt = 2\pi + \frac{8\pi^3}{3}.$$

Se $M = 2$, $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie e ω è una 2-forma differenziale:

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2.$$

Si trova:

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} F(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) du dv.$$

Questa quantità si chiama **integrale di superficie** o **flusso**⁷ del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ attraverso la superficie σ , e si indica con il simbolo

$$\int_{\sigma} F \cdot dS.$$

Esempio. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ attraverso la superficie $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u, v) = (u^2, v, u + v)$. Si ha:

$$\int_{\sigma} F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^1 [(-v)(-1) + u^2(-2u) + (u + v)^2(2u)] du dv = \frac{3}{2}.$$

È importante vedere come cambia l'integrale di una forma differenziale ω su due M -superfici equivalenti. Ricordiamo che $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono equivalenti se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subseteq I$, $B \subseteq J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono trascurabili e, per ogni $\mathbf{u} \in A$, $\sigma(\mathbf{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\mathbf{u}))$.

Diremo che σ e $\tilde{\sigma}$ hanno la **stessa orientazione** se $\det \varphi'(\mathbf{u}) > 0$ per ogni $\mathbf{u} \in A$; diremo che hanno **orientazione opposta** se $\det \varphi'(\mathbf{u}) < 0$ per ogni $\mathbf{u} \in A$.

⁶In meccanica si usa questo concetto, ad esempio, per definire il **lavoro** di una particella che descrive una curva in un campo di forze.

⁷In fluidodinamica si usa questo concetto, ad esempio, per definire la quantità di fluido che attraversa una superficie in un'unità di tempo.

Esempi. Data una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, una curva ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a + b - t).$$

Se σ è regolare, un esempio interessante di curva equivalente con la stessa orientazione si ottiene considerando la funzione

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| dr.$$

Siccome $\varphi'(t) = \|\sigma'(t)\| > 0$ per ogni $t \in]a, b[$, ponendo $\iota_1 = \varphi(b)$, si ha che $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, \iota_1]$ è biiettiva e la curva $\sigma_1(s) = \sigma(\varphi^{-1}(s))$ è equivalente a σ . Si noti che, per ogni $s \in]0, \iota_1[$, si ha

$$\begin{aligned} \|\sigma'_1(s)\| &= \|\sigma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s)\| \\ &= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \right\| \\ &= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\|\sigma'(\varphi^{-1}(s))\|} \right\| = 1. \end{aligned}$$

Data una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, una superficie ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(u, a_2 + b_2 - v),$$

oppure da

$$\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(a_1 + b_1 - u, v).$$

Teorema. Siano $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ due M -superfici equivalenti. Se hanno la stessa orientazione, allora

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\tilde{\sigma}} \omega;$$

se hanno orientazione opposta, allora

$$\int_{\sigma} \omega = - \int_{\tilde{\sigma}} \omega.$$

Dimostrazione. Abbiamo una M -forma differenziale del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1 \dots i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Sia $\varphi : A \rightarrow B$, come nella definizione di M -superfici equivalenti, tale che $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Per il teorema di cambiamento di variabili nell'integrale, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \int_A f_{i_1 \dots i_M}(\tilde{\sigma}(\varphi(\mathbf{u}))) \det(\tilde{\sigma} \circ \varphi)'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \int_A f_{i_1 \dots i_M}(\tilde{\sigma}(\varphi(\mathbf{u}))) \det \tilde{\sigma}'_{(i_1, \dots, i_M)}(\varphi(\mathbf{u})) \det \varphi'(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \\ &= \pm \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \int_B f_{i_1 \dots i_M}(\tilde{\sigma}(\mathbf{v})) \det \tilde{\sigma}'_{(i_1, \dots, i_M)}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} \\ &= \pm \int_{\tilde{\sigma}} \omega, \end{aligned}$$

con segno positivo se $\det \varphi' > 0$, negativo se $\det \varphi' < 0$. ■

Nota. In generale, se σ e $\tilde{\sigma}$ sono equivalenti, non sempre si ha l'uguaglianza $|\int_{\sigma} \omega| = |\int_{\tilde{\sigma}} \omega|$. Non è detto infatti che esse abbiano la stessa orientazione od orientazione opposta. Ad esempio, se consideriamo le due superfici $\sigma, \tilde{\sigma} : [1, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definite da

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \left(\left(\frac{3}{2} + \left(u - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{v}{2} \right) \cos v, \left(\frac{3}{2} + \left(u - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{v}{2} \right) \sin v, \left(u - \frac{3}{2} \right) \sin \frac{v}{2} \right), \\ \tilde{\sigma}(u, v) &= \sigma \left(u, v + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

si può vedere che sono entrambe parametrizzazioni dello stesso insieme (un nastro di Möbius) e pertanto sono equivalenti (il lettore è invitato ad esplicitare un diffeomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ con le proprietà della definizione). D'altra parte, se consideriamo la 2-forma differenziale $\omega(x_1, x_2, x_3) = dx_{12}$, determinata dal campo di vettori costante $(0, 0, 1)$, facendo i conti si ottiene

$$\int_{\sigma} \omega = 0, \quad \int_{\tilde{\sigma}} \omega = -3\sqrt{2}.$$

Consideriamo ora il caso importante in cui $M = N$.

Teorema. Sia $M = N$; se $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è regolare con $\det J\sigma(\mathbf{u}) > 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{I}$ e ω è della forma

$$\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N,$$

allora $\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} f$. Se inoltre σ è iniettiva su $\overset{\circ}{I}$, allora $\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma(I)} f$.

Dimostrazione. Essendo $\det \sigma' > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \omega &= \int_I f(\sigma(\mathbf{u})) \det(\sigma'(\mathbf{u})) \, d\mathbf{u} \\ &= \int_I f(\sigma(\mathbf{u})) |\det(\sigma'(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u} = \int_{\sigma} f. \end{aligned}$$

Se inoltre σ è iniettiva su $\overset{\circ}{I}$, facendo uso del teorema del diffeomorfismo locale, si vede che σ induce un diffeomorfismo tra $\overset{\circ}{I}$ e $\sigma(\overset{\circ}{I})$. Essendo trascurabili sia la frontiera di I che la sua immagine attraverso l'applicazione σ , tenendo conto del teorema di cambiamento di variabili abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} \omega &= \int_I f(\sigma(\mathbf{u})) \det(\sigma'(\mathbf{u})) d\mathbf{u} \\ &= \int_{\overset{\circ}{I}} f(\sigma(\mathbf{u})) |\det(\sigma'(\mathbf{u}))| d\mathbf{u} = \int_{\sigma(\overset{\circ}{I})} f = \int_{\sigma(I)} f,\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Se σ è la funzione identità, si ha che $\sigma(I) = I$ e al posto di $\int_{\sigma} \omega$ si userà scrivere $\int_I \omega$.

42 Incollamenti: il bordo orientato di un rettangolo

Supponiamo che $\sigma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N, \dots, \sigma_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}^N$ siano delle M -superfici. Chiamiamo "incollamento" di $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ la n -upla

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Si tratta di un insieme i cui elementi potrebbero non essere tutti distinti tra loro: potrebbe essere che $\sigma_i = \sigma_j$ per alcuni indici $i \neq j$.

Definiamo ora l'integrale di una M -forma differenziale ω sull'incollamento delle suddette M -superfici ponendo

$$\int_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \omega = \int_{\sigma_1} \omega + \dots + \int_{\sigma_n} \omega.$$

Supponiamo ora che I sia un rettangolo in \mathbb{R}^{M+1} , con $M \geq 1$:

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{M+1}, b_{M+1}].$$

Denotiamo con I_k il rettangolo di \mathbb{R}^M ottenuto da I sopprimendo la k -esima componente:

$$I_k = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_{M+1}, b_{M+1}].$$

Consideriamo, per ogni k , le M -superfici $\alpha_k^+, \beta_k^+ : I_k \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}$ definite da

$$\begin{aligned}\alpha_k^+(u_1, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_{M+1}) &= (u_1, \dots, u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, \dots, u_{M+1}), \\ \beta_k^+(u_1, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_{M+1}) &= (u_1, \dots, u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, \dots, u_{M+1}),\end{aligned}$$

dove il simbolo $\widehat{}$ sta ad indicare la soppressione della variabile sottostante. Consideriamo inoltre delle M -superfici $\alpha_k^-, \beta_k^- : I_k \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}$, equivalenti a α_k^+ e β_k^+ , rispettivamente, con orientazione opposta. (Stiamo qui considerando la situazione in cui $N = M + 1$.)

Definizione. Chiamiamo **bordo orientato** del rettangolo I un incollamento delle seguenti M -superfici:

- (a) α_k^- e β_k^+ se k è dispari,
- (b) α_k^+ e β_k^- se k è pari,

con $k = 1, \dots, M + 1$.

Se ω è una M -forma differenziale definita su un sottoinsieme U di \mathbb{R}^{M+1} contenente l'immagine di ∂I , avremo quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \left(\int_{\beta_k^+} \omega - \int_{\alpha_k^+} \omega \right). \end{aligned}$$

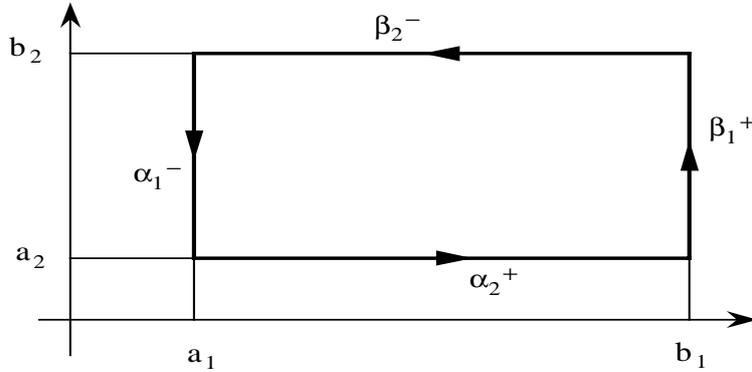
Se $M = 1$, consideriamo il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Allora, ad esempio:

$$\begin{aligned} \alpha_1^- &: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, & v &\mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v) \\ \beta_1^+ &: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, & v &\mapsto (b_1, v) \\ \alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, & u &\mapsto (u, a_2) \\ \beta_2^- &: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, & u &\mapsto (a_1 + b_1 - u, b_2). \end{aligned}$$

Si può visualizzare il bordo orientato

$$\partial I = (\alpha_1^-, \beta_1^+, \alpha_2^+, \beta_2^-)$$

come incollamento dei lati del rettangolo I orientati in modo che il perimetro sia percorso in senso antiorario.



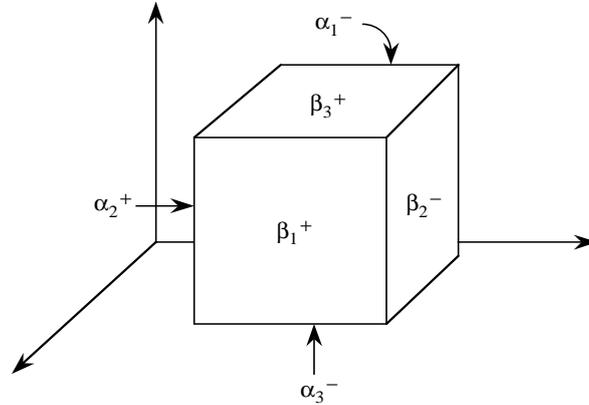
Se $M = 2$, abbiamo, ad esempio:

$$\begin{aligned} \alpha_1^- &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (v, w) &\mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v, w) \\ \beta_1^+ &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (v, w) &\mapsto (b_1, v, w) \\ \alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, w) &\mapsto (u, a_2, w) \\ \beta_2^- &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, w) &\mapsto (u, b_2, a_3 + b_3 - w) \\ \alpha_3^- &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, v) &\mapsto (a_1 + b_1 - u, v, a_3) \\ \beta_3^+ &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, v) &\mapsto (u, v, b_3). \end{aligned}$$

In questo caso, si può visualizzare il bordo orientato

$$\partial I = (\alpha_1^-, \beta_1^+, \alpha_2^+, \beta_2^-, \alpha_3^-, \beta_3^+)$$

come incollamento delle sei facce del parallelepipedo I , tutte orientate in modo tale che il vettore normale sia sempre rivolto verso l'esterno.



43 La formula di Gauss

In questa sezione, I sarà un rettangolo di \mathbb{R}^N , con $N \geq 2$ (quindi, rispetto alla sezione precedente, considereremo il caso $N = M + 1$). Nel teorema che segue, si ottiene l'elegante **formula di Gauss**.

Teorema. Se ω è una $(N - 1)$ -forma differenziale di classe C^1 definita su un aperto contenente un rettangolo I di \mathbb{R}^N , si ha:

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega.$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere ω nella forma

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N F_j(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \cdots \wedge dx_N.$$

Allora

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_m}(\mathbf{x}) dx_m \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \cdots \wedge dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N. \end{aligned}$$

Essendo le derivate parziali delle F_j continue, esse sono integrabili sull'intervallo I , e possiamo usare la formula di riduzione di Fubini:

$$\begin{aligned} \int_I d\omega &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_I \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_{I_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N) dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_j \dots dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_{I_j} [F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_N) - \\ &\quad - F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_N)] dx_1 \dots \widehat{dx}_j \dots dx_N, \end{aligned}$$

per il teorema fondamentale. D'altra parte,

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^N (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_k^+} \omega &= \sum_{j=1}^N \int_{\alpha_k^+} F_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{I_k} (F_j \circ \alpha_k^+) \det(\alpha_k^+)_{(1, \dots, \widehat{j}, \dots, N)}' dx_1 \dots \widehat{dx}_k \dots dx_N \\ &= \int_{I_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_N) dx_1 \dots \widehat{dx}_k \dots dx_N, \end{aligned}$$

essendo

$$\det(\alpha_k^+)_{(1, \dots, \widehat{j}, \dots, N)}' = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ 1 & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Procedendo similmente per β_k^+ , alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \int_{I_k} [F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_N) - \\ &\quad - F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_N)] dx_1 \dots \widehat{dx}_k \dots dx_N, \end{aligned}$$

e la dimostrazione è completa. ■

44 Bordo orientato di una M -superficie

In questa sezione, I sarà un rettangolo di \mathbb{R}^{M+1} e $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una $(M+1)$ -superficie.

Definizione. Se $1 \leq M \leq N-1$, chiameremo **bordo orientato** di σ la funzione $\partial\sigma = \sigma \circ \partial I$, che risulta essere un incollamento delle seguenti M -superfici:

- (a) $\sigma \circ \alpha_k^-$ e $\sigma \circ \beta_k^+$ se k è dispari;
- (b) $\sigma \circ \alpha_k^+$ e $\sigma \circ \beta_k^-$ se k è pari,

con $k = 1, \dots, M+1$.

Data una M -forma differenziale ω il cui dominio contiene il supporto di $\partial\sigma$, avremo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\sigma \circ \alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\sigma \circ \beta_k^+} \omega \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \left(\int_{\sigma \circ \beta_k^+} \omega - \int_{\sigma \circ \alpha_k^+} \omega \right). \end{aligned}$$

Nota. È utile estendere la scrittura $\int_{\partial\sigma} \omega$ nel caso in cui $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia una curva, con $N \geq 1$, e $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una 0-forma differenziale; in questo caso, si pone:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Esempi. Come illustrazione, consideriamo come al solito il caso $N = 3$. Cominciamo con tre esempi di bordo orientato di superfici.

1. Sia $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $0 \leq r < R$, data da

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0).$$

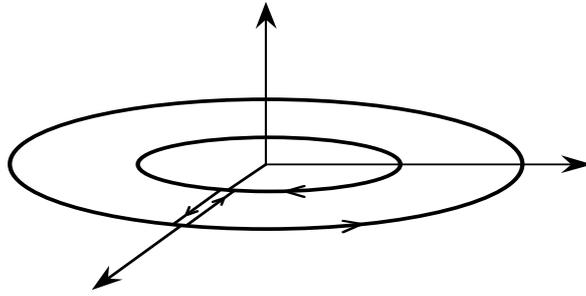
Il suo supporto è un cerchio se $r = 0$, una corona circolare se $r > 0$. Il bordo orientato

$$\partial\sigma = (\sigma \circ \alpha_1^-, \sigma \circ \beta_1^+, \sigma \circ \alpha_2^+, \sigma \circ \beta_2^-)$$

è dato dall'incollamento delle seguenti quattro curve:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \alpha_1^-(v) &= (r \cos v, -r \sin v, 0), \\ \sigma \circ \beta_1^+(v) &= (R \cos v, R \sin v, 0), \\ \sigma \circ \alpha_2^+(u) &= (u, 0, 0), \\ \sigma \circ \beta_2^-(u) &= (r + R - u, 0, 0). \end{aligned}$$

La prima curva ha come supporto una circonferenza di raggio r , che degenera nell'origine nel caso in cui $r = 0$. La seconda ha come supporto una circonferenza di raggio R . Si noti però che il verso di percorrenza di queste due



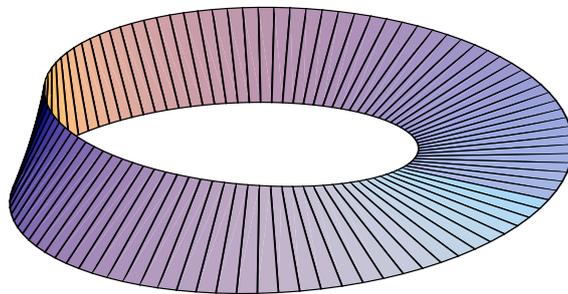
circonferenze è opposto. Le ultime due curve sono equivalenti con orientazioni opposte.

Sia ora dato, per esempio, il campo di vettori $F(x, y, z) = (-y, x, xye^z)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} F \cdot d\ell + \int_{\sigma \circ \beta_1^+} F \cdot d\ell \\ &= \int_0^{2\pi} [-r^2 \sin^2 v - r^2 \cos^2 v] dv + \int_0^{2\pi} [R^2 \sin^2 v + R^2 \cos^2 v] dv \\ &= 2\pi(R^2 - r^2). \end{aligned}$$

2. Consideriamo la superficie $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $0 < r < R$, definita da

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \left(\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2} \right) \cos \left(\frac{v}{2} \right) \right) \cos v, \right. \\ &\quad \left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2} \right) \cos \left(\frac{v}{2} \right) \right) \sin v, \\ &\quad \left. \left(u - \frac{r+R}{2} \right) \sin \left(\frac{v}{2} \right) \right), \end{aligned}$$



il cui supporto è un nastro di Möbius. In questo caso, il bordo orientato è dato

dall'incollamento di:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(v) &= \left(\left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \cos v, \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \sin v, \right. \\ &\quad \left. - \frac{R-r}{2} \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right), \\ \sigma \circ \beta_1^+(v) &= \left(\left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \cos v, \right. \\ &\quad \left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \right) \sin v, \\ &\quad \left. \frac{R-r}{2} \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right), \\ \sigma \circ \alpha_2^+(u) &= (u, 0, 0), \\ \sigma \circ \beta_2^-(u) &= (u, 0, 0).\end{aligned}$$

Si noti che in questo caso le ultime due curve sono identiche.

3. Consideriamo la superficie $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi),$$

il cui supporto è la sfera di raggio $R > 0$ centrata nell'origine. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(\theta) &= (0, 0, R), \\ \sigma \circ \beta_1^+(\theta) &= (0, 0, -R), \\ \sigma \circ \alpha_2^+(\phi) &= (R \sin \phi, 0, R \cos \phi), \\ \sigma \circ \beta_2^-(\phi) &= (R \sin \phi, 0, -R \cos \phi).\end{aligned}$$

Si noti che le prime due curve sono degenerare in un punto, mentre le ultime due sono equivalenti con orientazioni opposte. Quindi, qualsiasi sia il campo di vettori F , si avrà $\int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell = 0$.

Vediamo ora un esempio di bordo orientato di un volume in \mathbb{R}^3 . Sia $\sigma : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ il volume definito da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi),$$

il cui supporto è la palla, centrata nell'origine, di raggio $R > 0$. Il bordo orientato

$$\partial\sigma = (\sigma \circ \alpha_1^-, \sigma \circ \beta_1^+, \sigma \circ \alpha_2^+, \sigma \circ \beta_2^-, \sigma \circ \alpha_3^-, \sigma \circ \beta_3^+)$$

è dato dall'incollamento delle seguenti sei superfici:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(\phi, \theta) &= (0, 0, 0), \\ \sigma \circ \beta_1^+(\phi, \theta) &= (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi), \\ \sigma \circ \alpha_2^+(\rho, \theta) &= (0, 0, \rho), \\ \sigma \circ \beta_2^-(\rho, \theta) &= (0, 0, -\rho), \\ \sigma \circ \alpha_3^-(\rho, \phi) &= ((R - \rho) \sin \phi, 0, (R - \rho) \cos \phi), \\ \sigma \circ \beta_3^+(\rho, \phi) &= (\rho \sin \phi, 0, \rho \cos \phi).\end{aligned}$$

Si noti che la prima superficie è degenerata in un punto (l'origine), la seconda ha come supporto la sfera intera, la terza e la quarta sono degenerare in due curve mentre le rimanenti due sono equivalenti con orientazioni opposte. In questo esempio, quindi, dato un campo di vettori F , si avrà sempre

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dS = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} F \cdot dS.$$

45 La formula di Stokes–Cartan

Enunciamo la seguente generalizzazione del teorema di Gauss, in cui si ottiene l'importante **formula di Stokes–Cartan**.

Teorema. Sia $0 \leq M \leq N - 1$. Se $\omega : U \rightarrow \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è una M -forma differenziale di classe C^1 e $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una $(M + 1)$ -superficie il cui supporto è contenuto in U , si ha:

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Si noti che il caso $M = 0$, $N = 1$ e $\sigma(u) = u$ è una versione del teorema fondamentale, anche se qui si richiede che la derivata di ω sia continua.

Consideriamo alcuni corollari.

Il caso $M = 0$. Consideriamo una 0-forma differenziale $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e otteniamo il seguente

Teorema. Sia $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare di classe C^1 e $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una curva con supporto contenuto in U . Allora:

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot dl = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $G(t) = f(\sigma(t))$. Essa è di classe C^1 , e per il teorema fondamentale si ha

$$\int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a).$$

Siccome $G'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$, ne segue la formula cercata. ■

Nota. L'integrale di linea del gradiente di una funzione f non dipende dalla curva scelta, ma soltanto dal valore della funzione nei due estremi $\sigma(b)$ e $\sigma(a)$.

Esempio. Siano dati il campo di vettori in \mathbb{R}^3

$$F(x, y, z) = - \left(\frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \frac{y}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

e la curva $\sigma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Vogliamo calcolare l'integrale di linea $\int_{\sigma} F \cdot d\ell$. Osserviamo che $F = \nabla f$, con

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

e quindi:

$$\int_{\sigma} F \cdot d\ell = f(\sigma(4\pi)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{\sqrt{1 + 16\pi^2}} - 1.$$

Il caso $M = 1, N = 3$. Consideriamo una 1-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + F_3(\mathbf{x}) dx_3$$

e otteniamo la **formula di Kelvin–Stokes**.

Teorema. Sia $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori di classe C^1 e $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie con supporto contenuto in U . Si ha:

$$\int_{\sigma} \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell.$$

A parole. Il flusso del rotore del campo F attraverso la superficie σ coincide con l'integrale di linea di F lungo il bordo di σ .

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che σ sia di classe C^2 . Posto $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, definiamo la seguente 1-forma differenziale in \mathbb{R}^2 :

$$\tilde{\omega}(u, v) = F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) du + F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) dv.$$

Iniziamo a valutare il suo integrale su α_1^- :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1^-} \tilde{\omega} &= \int_{a_2}^{b_2} F(\sigma(a_1, a_2 + b_2 - v)) \cdot \left(- \frac{\partial\sigma}{\partial v}(a_1, a_2 + b_2 - v) \right) dv \\ &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} F \cdot d\ell. \end{aligned}$$

Si verificano poi le analoghe uguaglianze per l'integrale su β_1^+ , α_2^+ e β_2^- , per cui si ha che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell.$$

Con un po' di conti, si trova:

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(u, v) &= \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right) \right] du \wedge dv \\ &= \nabla \times F(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) du \wedge dv, \end{aligned}$$

per cui

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_{\sigma} \nabla \times F \cdot dS.$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere. ■

Esempio. Sia $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$ e $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$; vogliamo calcolare l'integrale di linea $\int_{\gamma} F \cdot d\ell$. Abbiamo già visto come calcolare questo integrale facendo uso diretto della definizione. Procediamo ora in un altro modo: definiamo la superficie $\sigma : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$. Osserviamo che $\gamma = \sigma \circ \beta_1^+$, per cui si ha:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} F \cdot d\ell = \int_{\partial \sigma} F \cdot d\ell = \int_{\sigma} \nabla \times F \cdot dS.$$

Osserviamo che $\nabla \times F(x, y, z) = (0, 0, 2)$ e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}(\rho, \theta) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\rho, \theta) = (0, 0, \rho).$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} F \cdot d\ell = \int_0^R \int_0^{2\pi} (0, 0, 2) \cdot (0, 0, \rho) d\theta d\rho = 2\pi R^2.$$

Il caso $M = 2, N = 3$. Consideriamo una 2-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2$$

e otteniamo la **formula di Gauss–Ostrogradski**.

Teorema. Sia $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori di classe C^1 e supponiamo che $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia una 3-superficie (ossia un volume) con supporto contenuto in U . Si ha:

$$\int_{\sigma} \nabla \cdot F dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial \sigma} F \cdot dS.$$

Se inoltre σ è regolare e iniettiva su $\overset{\circ}{I}$, con $\det J\sigma(\mathbf{u}) > 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{I}$, allora

$$\int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F = \int_{\partial \sigma} F \cdot dS.$$

In termini intuitivi. L'integrale della divergenza del campo F sull'insieme $V = \sigma(I)$ coincide con il flusso di F uscente da V .

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che σ sia di classe C^2 . Consideriamo la seguente 2-forma differenziale $\tilde{\omega} : I \rightarrow \Omega_2(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\mathbf{u}) &= F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \right) du_2 \wedge du_3 + \\ &+ F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \right) du_3 \wedge du_1 + \\ &+ F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right) du_1 \wedge du_2\end{aligned}$$

Considerata la superficie β_1^+ , si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\beta_1^+} \tilde{\omega} &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} F(b_1, u_2, u_3) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(b_1, u_2, u_3) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(b_1, u_2, u_3) \right) du_2 du_3 \\ &= \int_{\beta_1^+} F \cdot dS.\end{aligned}$$

Calcolando analogamente gli integrali sulle altre cinque superfici che compongono ∂I , si conclude che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} F \cdot dS.$$

Facendo i conti, con un po' di pazienza si ha:

$$\begin{aligned}d\tilde{\omega}(\mathbf{u}) &= \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \right) \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_2} \left(F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \right) \right) + \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(F(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right) \right) \right] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \\ &= \nabla \cdot F(\sigma(\mathbf{u})) \det \sigma'(\mathbf{u}) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3.\end{aligned}$$

Quindi, si ha:

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \nabla \cdot F(\sigma(\mathbf{u})) \det \sigma'(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

D'altra parte, siccome σ induce un diffeomorfismo tra \dot{I} e $\sigma(\dot{I})$ con $\det \sigma' > 0$, per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I \nabla \cdot F(\sigma(\mathbf{u})) \det \sigma'(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere. ■

Esempio. Si voglia calcolare il flusso del campo di vettori

$$F(x, y, z) = ([x^2 + y^2 + z^2]x, [x^2 + y^2 + z^2]y, [x^2 + y^2 + z^2]z)$$

attraverso una superficie sferica parametrizzata da $\eta : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\eta(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi).$$

Ci ricordiamo che $\eta = \sigma \circ \beta_1^+$, dove $\sigma : I = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il volume dato da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

Abbiamo quindi:

$$\int_{\eta} F \cdot dS = \int_{\partial\sigma} F \cdot dS = \int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F.$$

Essendo $\nabla \cdot F(x, y, z) = 5(x^2 + y^2 + z^2)$, passando a coordinate sferiche si ha:

$$\int_{\sigma(I)} \nabla \cdot F = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R (5\rho^2)(\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta = 4\pi R^5.$$

46 Interpretazione fisica del rotore e della divergenza

Il rotore. La formula di Kelvin–Stokes ci permette di dare un’interpretazione del rotore di un campo di vettori F in \mathbb{R}^3 . Supponiamo dapprima che $\nabla \times F$ sia costante. Se ne conosciamo la direzione, possiamo prendere un piano ad esso ortogonale, e su questo piano un cerchio di raggio $r > 0$ (e quindi di area πr^2), che possiamo facilmente parametrizzare, in coordinate polari, con una superficie $\sigma_r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Allora

$$\int_{\sigma_r} \nabla \times F \cdot dS = \pm \pi r^2 \|\nabla \times F\|.$$

Scegliamo ora l’orientazione per la parametrizzazione σ_r in modo che il versore normale ν_{σ_r} abbia la stessa direzione di $\nabla \times F$. Dalla formula di Stokes–Ampère troviamo quindi la lunghezza del rotore:

$$\|\nabla \times F\| = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot dl.$$

Nel caso in cui $\nabla \times F$ dovesse non essere costante, fissiamo un punto \mathbf{x} del dominio e procediamo come sopra, prendendo il cerchio parametrizzato da σ_r centrato in \mathbf{x} di raggio r . Per continuità, se $r > 0$ è molto piccolo, possiamo supporre che $\nabla \times F$ sia “quasi costante” su questo cerchio. Più precisamente, avremo che

$$\|\nabla \times F(\mathbf{x})\| = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot dl.$$

Si vede da questa espressione che il rotore misura il contributo rotativo del campo F lungo la circonferenza $\partial\sigma_r$. Da qui il nome “rotore”.

Se non dovessimo conoscere a priori la direzione di $\nabla \times F(\mathbf{x})$, la si può determinare nel modo seguente: per ogni piano passante per \mathbf{x} si procede come sopra e si calcola il $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot d\ell$. Tra tutte queste quantità, ottenute scegliendo i piani in tutti i modi possibili, si determina quella più grande. Il piano che realizza questa quantità massima sarà quello ortogonale a $\nabla \times F(\mathbf{x})$, e il versore normale individuato da σ_r avrà la stessa direzione di $\nabla \times F(\mathbf{x})$.

La divergenza. La formula di Gauss–Ostrogradski ci può dare un’interpretazione della divergenza di un campo di vettori F in \mathbb{R}^3 . Supponiamo dapprima che $\nabla \cdot F$ sia costante. Consideriamo una palla chiusa \overline{B}_r , di raggio $r > 0$ (e quindi di volume $\frac{4}{3}\pi r^3$), che possiamo facilmente parametrizzare, in coordinate sferiche, con una 3-superficie $\sigma_r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, avente $\det J\sigma_r(\mathbf{u}) > 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \dot{I}$. Allora

$$\int_{\overline{B}_r} \nabla \cdot F = \frac{4}{3}\pi r^3 \nabla \cdot F.$$

Dalla formula di Gauss–Ostrogradski troviamo quindi che

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot dS.$$

Nel caso in cui $\nabla \cdot F$ dovesse non essere costante, fissiamo un punto \mathbf{x} del dominio e procediamo come sopra, prendendo la palla $\overline{B}_r = \overline{B}(\mathbf{x}, r)$, centrata in \mathbf{x} di raggio r , parametrizzata da σ_r . Per continuità, se $r > 0$ è molto piccolo, possiamo supporre che $\nabla \cdot F$ sia “quasi costante” su questa palla. Più precisamente, avremo che

$$\nabla \cdot F(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{\partial\sigma_r} F \cdot d\ell.$$

Da questa formula si vede che la divergenza ci fornisce una misura del flusso per unità di volume del campo F attraverso la superficie sferica $\partial\sigma_r$. Questo sarà positivo se il campo fluisce verso l’esterno, negativo se verso l’interno. Da qui il nome “divergenza”.

47 Risultati analoghi in \mathbb{R}^2

Supponiamo che U sia un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 . Come corollario del teorema di Stokes–Cartan, prendendo $M = 1$, $N = 2$, otteniamo la **formula di Gauss–Green**.

Teorema. Sia $F = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo di vettori di classe C^1 e supponiamo che $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sia una superficie con supporto contenuto in U . Si ha:

$$\int_{\sigma} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell.$$

Se inoltre σ è regolare e iniettiva su $\overset{\circ}{I}$, con $\det J\sigma(\mathbf{u}) > 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{I}$, allora

$$\int_{\sigma(I)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell.$$

Dimostrazione. Supporremo per semplicità che σ sia di classe C^2 . Similmente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema di Stokes-Ampère, consideriamo la forma differenziale ausiliaria $\tilde{\omega} : I \rightarrow \Omega_1(\mathbb{R}^2)$ definita da

$$\tilde{\omega}(u, v) = F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) du + F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) dv$$

e verifichiamo che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell.$$

Se σ è di classe C^2 , allora $\tilde{\omega}$ è di classe C^1 e, facendo i conti, si trova

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(u, v) &= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} \left(F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \right) \right] du \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u, v)) \right) \det \sigma'(u, v) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u, v)) \right) \det \sigma'(u, v) du dv,$$

e siccome σ induce un diffeomorfismo tra $\overset{\circ}{I}$ e $\sigma(\overset{\circ}{I})$ con $\det \sigma' > 0$, per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_{\sigma(I)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere. ■

Esempio. Consideriamo la superficie $\sigma : I = [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\sigma(\rho, \theta) = (A\rho \cos \theta, B\rho \sin \theta)$, il cui supporto è una superficie ellittica avente semiassi di lunghezza $A > 0$ e $B > 0$. Si prenda il campo di vettori $F(x, y) = (-y, x)$. Essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2$$

e (come nel caso del cerchio)

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot d\ell = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} F \cdot d\ell,$$

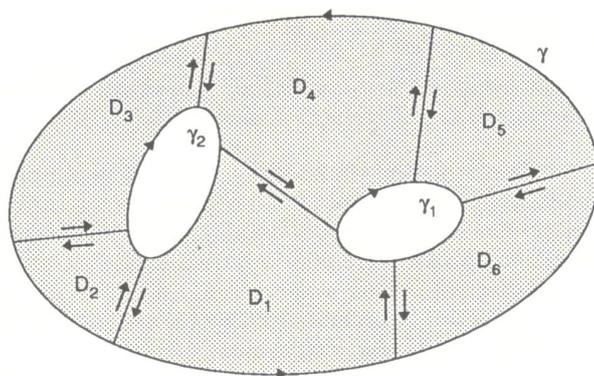
la formula di Gauss-Green ci da:

$$\int_{\sigma(I)} 2 dx dy = \int_0^{2\pi} (-B \sin \theta, A \cos \theta) \cdot (-A \sin \theta, B \cos \theta) d\theta = 2\pi AB.$$

Se ne ricava l'area della superficie ellittica: $\mu(\sigma(I)) = \pi AB$.

48 Possibili estensioni della teoria

Quanto visto finora può essere esteso alla trattazione di insiemi che non siano direttamente parametrizzabili. Ad esempio, un insieme come in figura può essere trattato suddividendolo in parti più piccole che siano separatamente parametrizzabili, e considerando l'incollamento di tali parametrizzazioni.



Bisogna però fare attenzione che le orientazioni scelte permettano di annullare le parti parassiti interne che si vengono così a creare. La suddivisione della figura, ad esempio, mostra che i segmenti interni sono stati parametrizzati in modo tale che il loro incollamento non darà un contributo effettivo all'integrale, in quanto esse sono a due a due equivalenti con orientazione opposta. Una trattazione generale diventa però piuttosto delicata e non verrà affrontata qui.

Un altro modo di affrontare il problema generale potrebbe essere quello di considerare delle "parametrizzazioni locali" di un insieme. Si è così portati a studiare le cosiddette "varietà differenziabili" e bisogna definire cosa si intende per integrale di una forma differenziale su una varietà di questo tipo. Anche qui ci si trova a dover considerare il problema dell'orientazione, sia della varietà differenziabile che del suo bordo. La questione è piuttosto complicata e preferiamo non approfondirla in questo corso.

Per ognuna delle sopra citate estensioni della teoria c'è il relativo Teorema di Stokes-Cartan, con le sue conseguenze in dimensione 2 e 3, del tutto analoghe a quelle che abbiamo già visto.

49 Forme differenziali chiuse ed esatte

Ci interessiamo ora al problema di trovare in quali casi una forma differenziale data possa essere scritta come il differenziale esterno di una forma differenziale da determinarsi. In questa sezione, supporremo $M \geq 1$.

Definizione. Una M -forma differenziale ω si dice **chiusa** se $d\omega = 0$; si dice **esatta** se esiste una $(M - 1)$ -forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$.

Ogni forma differenziale esatta è chiusa: se $\omega = d\tilde{\omega}$, allora $d\omega = d(d\tilde{\omega}) = 0$. Il viceversa non sempre è vero.

Esempio. La 1-forma differenziale definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa, come facilmente si verifica: ponendo

$$F_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y).$$

Calcoliamo l'integrale di linea del campo di vettori $F = (F_1, F_2)$ che determina la forma differenziale sulla curva $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} F \cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che ω sia esatta, cioè che esista una funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$. In tal caso, essendo $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$, si avrebbe:

$$\int_{\sigma} F \cdot d\ell = \int_{\sigma} \nabla f \cdot d\ell = f(\sigma(2\pi)) - f(\sigma(0)) = 0,$$

in contraddizione con quanto sopra.

La situazione descritta nell'esempio precedente non può verificarsi se, ad esempio, l'insieme U su cui è definita la forma differenziale è un aperto stellato rispetto ad un punto $\bar{\mathbf{x}}$, cioè contiene, per ogni suo punto \mathbf{x} , tutto il segmento che congiunge \mathbf{x} a $\bar{\mathbf{x}}$. Vale infatti il seguente **teorema di Poincaré**:

Teorema. Sia U un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N stellato rispetto ad un punto $\bar{\mathbf{x}}$. Per $1 \leq M \leq N$, una M -forma differenziale di classe C^1 definita su U è esatta se e solo se essa è chiusa.

Consideriamo alcuni corollari che si ottengono nel caso $N = 3$. Per semplificare la scrittura, supporremo senza perdita di generalità $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)$.

Il caso $M = 1$. Un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, di classe C^1 , definito su un sottoinsieme aperto U di \mathbb{R}^3 , determina una 1-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + F_3(\mathbf{x}) dx_3.$$

Essa è chiusa se e solo se $\nabla \times F = 0$. In questo caso, il campo di vettori si dice **irrotazionale**. Diremo invece che il campo di vettori F è **conservativo** se esiste una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla f$. In tal caso f è detta **potenziale scalare** del campo F .⁸

⁸In meccanica spesso è la funzione $-f$ a chiamarsi "potenziale".

Teorema. Se U è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è conservativo se e solo se esso è irrotazionale.

Si può dimostrare che in tal caso una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla f$ è data da:

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle F(t\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle dt.$$

Ogni altra funzione $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla \tilde{f}$ si ottiene da f aggiungendo una costante.

Il caso $M = 2$. Un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, di classe C^1 , definito su un sottoinsieme aperto U di \mathbb{R}^3 , determina una 2-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2.$$

Essa è chiusa se e solo se $\nabla \cdot F = 0$. In questo caso, il campo di vettori si dice **solenoidale**. Si dice che F ha un **potenziale vettore** se esiste un campo di vettori $V = (V_1, V_2, V_3)$ tale che $F = \nabla \times V$.

Teorema. Se U è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha un potenziale vettore se e solo se esso è solenoidale.

Si può dimostrare che in tal caso un campo di vettori $V : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F = \nabla \times V$ è dato da

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^1 t(F(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) dt.$$

Ogni altro campo di vettori $\tilde{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F = \nabla \times \tilde{V}$ si ottiene da V aggiungendo il gradiente di una qualsiasi funzione scalare.

Il caso $M = 3$. Una funzione scalare f , di classe C^1 , definita su un sottoinsieme aperto U di \mathbb{R}^3 , determina una 3-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Essa è sempre chiusa, essendo $d\omega$ una 4-forma differenziale definita su un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 .

Teorema. Se U è stellato rispetto all'origine, una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è sempre della forma $f = \nabla \cdot W$.

Si può dimostrare che un campo di vettori $W : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ con questa proprietà è dato da

$$W(\mathbf{x}) = \left(\int_0^1 t^2 f(t\mathbf{x}) dt \right) \mathbf{x}.$$

Ogni altro campo di vettori $\tilde{W} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F = \nabla \cdot \tilde{W}$ si ottiene da W aggiungendo il rotore di un qualsiasi campo di vettori.