Preappello 21 Dicembre 2022 *Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche)*
Prof. Fabio Vlacci
A.A. 2022/2023

LEGGERE ATTENTAMENTE IL TESTO E GIUSTIFICARE (QUANDO RICHIESTO) LE RISPOSTE AI QUESITI.

Scrivere il proprio

NOME...

COGNOME...

NUMERO MATRICOLA...

1. Rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale, siano dati i punti del piano di coordinate cartesiane $A = (-3, 3)$, $B = (-3, -1)$ e $C = (2, -1)$.
   Individuare le coordinate polari del punto A.
   Trovare l'equazione cartesiana della retta r passante per A e per C; verificato che $B \notin r$, trovare le coordinate del centro della circonferenza passante per A, per B e per C e il raggio della circonferenza medesima. [SI RICORDA CHE IL CENTRO DI UNA CIRCONFERENZA È ANCHE L'INTERSEZIONE DEGLI ASSI DI DUE CORDE (NON PARALLELE)]

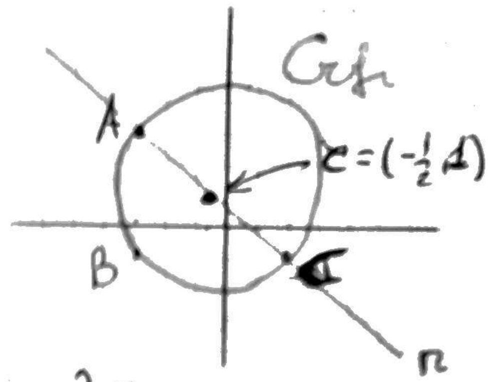
2. Mostrare che $b_n := \binom{2n}{n} < 2^{2n-2} = 4^{n-1}$ per $n \geq 5$.
   Trovare la media aritmetica dei valori $\{b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$.
   Stabilire quindi se esiste il
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$$
   e, in caso affermativo, calcolarlo.

3. Calcolare, se esistono,
   $$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x \sin x} \quad b)\ \lim_{n\to+\infty} n[\ln(1-\tan(1/n))] \quad c)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{1+(-2)^n}$$

4. Dopo aver eseguito il relativo studio, in cui si evidenzi
   a) il dominio della funzione;
   b) il sottoinsieme del dominio in cui la funzione risulti continua;
   c) il sottoinsieme del dominio in cui la funzione risulti derivabile;
   d) eventuali asintoti e punti di massimo e minimo locali
   tracciare un grafico significativo della funzione
   $$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{e^x}.$$
   Senza calcolarli esplicitamente, mostrare che la funzione f ha esattamente 2 punti di flesso. Determinare inoltre l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico di f nel punto $(3, \sqrt{8}/e^3)$.
   Trovare infine sup (estremo superiore) e inf (estremo inferiore) dell'insieme $\{f(x)\ x < -1\}$ e dell'insieme $\{f(x)\ x > 2\}$.

1) $A=(-3,3)$, $B=(-3,-1)$, $C=(2,-1)$

• COORDINATE POLARI A



$A=(-3,3) \Rightarrow$ ~~A~~ $\rho_A=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\theta_A = 90°+45°$

$= 135° = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

• EQUAZIONE RETTA r PER A, C

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \rightsquigarrow \frac{x+3}{2+3} = \frac{y-3}{-1-3}$$

$$\rightarrow x+3 = -\frac{5}{4}(y-3)$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = y-3$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}}$$

r(A) : $3 \overset{?}{=} +\frac{12}{5}+\frac{3}{5}$ sì

r(C) $-1 \overset{?}{=} -\frac{8}{5}x+\frac{3}{5}$ ✓

Vediamo che $B \notin r$

$$-1 \overset{?}{=} -\frac{4}{5}(-3)+\frac{3}{5} = \frac{12}{5}+\frac{3}{5} = 3 \quad \underline{NO} \Rightarrow B \notin r$$

• CIRCONFERENZA PER A, B, C

$$\begin{cases} (x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2=r^2 \\ (x_B-x_0)^2+(y_B-y_0)^2=r^2 \\ (x_C-x_0)^2+(y_C-y_0)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = R^2 & (\mathrm{I}) \\ (-3-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 = R^2 & (\mathrm{II}) \\ (2-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 = R^2 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

$$(-3-x_0)^2 = R^2 - (3-y_0)^2 \quad (\mathrm{I})$$

$$= R^2 - (-1-y_0)^2 \quad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow (3-y_0)^2 = (-1-y_0)^2$$

$$\Rightarrow 9 + \cancel{y_0^2} - 6y_0 = 1 + \cancel{y_0^2} + 2y_0$$

$$\Rightarrow 8 = 8y_0 \Rightarrow \boxed{y_0 = 1}$$

$$(-1-y_0)^2 = R^2 - (2-x_0)^2 \quad (\mathrm{III})$$

$$= R^2 - (-3-x_0)^2 \quad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow (2-x_0)^2 = (3+x_0)^2 \Rightarrow 4 + \cancel{x_0^2} - 4x_0 = 9 + \cancel{x_0^2} + 6x_0$$

$$\Rightarrow 10x_0 = -5 \Rightarrow \boxed{x_0 = -\frac{1}{2}}$$

$$R^2 = \left(-3+\frac{1}{2}\right)^2 + (3-1)^2 = \left(\frac{-6+1}{2}\right)^2 + 4$$

$$= \frac{25}{4} + 4 = \frac{41}{16}$$

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{41}}{4}}$$

$C_{2}f: \boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{41}{16}}$

$x_0=-\frac{1}{2},\ y_0=1$ ste in r?

$1 \stackrel{?}{=} -\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{5}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$

---

2) $b_n=\binom{2n}{n}<2^{2n-2}=4^{n-1}$ per $n\geq 5$

~~oss~~ $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$b_n=\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}=\frac{2^n\cancel{n!}}{n!\,\cancel{n!}}=\frac{2^n}{n!}$

Claim $\frac{2^n}{n!}<2^{2n-2}$ per $n\geq 5$

$n=5 \to \frac{2\cdot 2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot\cancel{2}} \stackrel{?}{<} 2^8=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$\Updownarrow$

$\frac{4}{15}<4\cdot 2^6 \iff \frac{1}{15}<2^6$ vero

Per induzione, vero per n, vediamo $n+1$

$\binom{2(n+1)}{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^n 2}{n!\,(n+1)} \stackrel{?}{<} 2^{2(n+1)-2}=2^{2n-2+2}.$

$=2^{2n-2}\cdot 4$

pend du $\frac{2^n}{n!} < 2^{2n-2}$ dobbiamo dim che

$$\frac{2^n \cdot 2}{n!\,(n+1)} < 2^{n-2} \cdot 4$$

$$\frac{2^n \cdot 2}{n!\,(n+1)} < \frac{2 \cdot 2^{2n-2}}{(n+1)} \overset{?}{<} 2^{2n-2} \cdot 4$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)} < 2 \quad \text{Vero } \forall n$$

⇒ abbiamo dimostrato

Media aritmetica $= \dfrac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{6}$

$b_n = \frac{2^n}{n!}$

$$= \frac{1 + 2 + \left(\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{8}{6}\right) + \left(\frac{16}{24}\right) + \left(\cancel{\frac{32}{120}}\right)}{6} = \text{FARE CONTI}$$

$\cancel{8}$ 4 $\cancel{35}$ 15

Se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n} = \frac{2^n n!}{n! n! 5^n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{5}\right)^n > 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{b_n}{5^n} < \frac{4^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{4}\frac{4^n}{5^n} \longrightarrow 0 \text{ essendo}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n, \ \frac{4}{5} < 1$$

$\Rightarrow$ due Carabinieri; $\lim = 0$

---

3) a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \, x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln\left(1-\tan\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\right]$$

Recall: $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\tan\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$\ln\left(1-\tan\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^n \sim \ln\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \ln(e^{-1})$$

$$= \boxed{-1}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3}{1+(-2)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3}{1+(-1)^n 2^n}$

n pari $\rightarrow \dfrac{-3}{1+2^k} < 0$
$n=2k$

n dispari $\dfrac{-3}{1+(-2)^{2k+1}} = \dfrac{-3}{1-2(-2)^{2k}}$
$n=2k+1$

$= \dfrac{-3}{1-2\cdot 2^{2k}}$

inutile

$(-2)^n = [(-1)(2)]^n = (-1)^n 2^n$

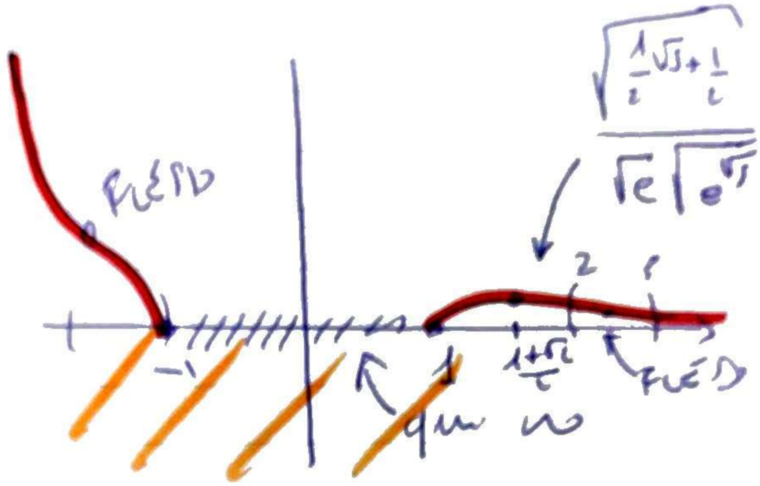
$\dfrac{3}{1-2^n} < \dfrac{3}{1+(-1)^n 2^n} < \dfrac{3}{1+2^n}$

$\Rightarrow \dfrac{-3}{1+2^n} < \dfrac{-3}{1+(-2)^n} < \dfrac{-3}{1-2^n}$

$\downarrow$ 0 $\quad\quad$ $\downarrow$ 0 $\quad \Rightarrow$ Va a 0 per due cara.

4

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{e^x}$



a) DOMINIO

$\sqrt{x^2-1}$ deve essere definita, cioè

$x^2-1 \geq 0 \iff x \leq -1$ o $x \geq 1$ Dom $f = \{x \leq -1\} \cup \{x \geq 1\}$

b) La funzione è continua in tutto ~~il dominio~~ $x \leq -1$, $x \geq 1$

Inoltre si può estendere per continuità su tutto $\mathbb{R}$, ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \text{Dom} f \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$f(x) = 0 \iff \text{Num} = 0 \iff x = -1,\ x = 1$

c) Derivabile come continua

Segno: $f(x) \geq 0 \iff \text{Num} \geq 0$ essendo $e^x > 0 \ \forall x$

Vero, essendo $\sqrt{\cdot} \geq 0$ sempre

$\Rightarrow$ la funzione è sempre positiva

$$f'(x) = \frac{e^x\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} - e^x\sqrt{x^2-1}\right)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \cancel{\sqrt{x^2-1}}\right)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{\cancel{e^x}\left(x - x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-1}\cdot e^{2\cancel{x}}} = \frac{\left(-x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^2-1}\, e^x}$$

$$f'(x) = 0 \iff -x^2+x+1 = 0$$

$$\iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6 \notin \text{Ran}$$

$\Rightarrow$ massimo (relativo) in $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \sqrt{\frac{x^2-1}{e^x}} = 0$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - 1}}{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}\sqrt{e^{\sqrt{5}}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{e^x} = +\infty$$

$\Rightarrow$ ho asintoto oriz. $y=0$ a Dx

$$\lim_{x \to \pm 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \text{ no asintoto vert.}$$

Vediamo as obliquo a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\, e^x} \sim \frac{1}{e^x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \infty$$

no asintoto obliquo

$$f''(x) = \frac{(-2x+1)\sqrt{x^2-1}\,\cancel{e^x} - (-x^2+x+1)\left(\cancel{e^x}\sqrt{x^2-1} + \cancel{e^x}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{(x^2-1)\,e^{\cancel{2}x}}$$

$$= \frac{(-2x+1)\sqrt{x^2-1} + (x^2-x-1)\left(\frac{x^2-1+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{(x^2-1)\,e^x}$$

$$= (-2x+1)(x^2-1) + (x^2-x-1)(x^2+x-1) \Big/ e^x \cdot (x^2-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-2x^3+2x+\cancel{x^2}\cancel{+1}+x^4+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x^2-x^2+\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x+1}}{(x^2-1)^{3/2}e^x}$$

Qui dentro c'è un errore da qualche parte

$$= \frac{-2x^3+2x+x^4-x^2}{(x^2-1)^{3/2}e^x}$$

ERRORE: giusto è

$$= \frac{x(x^3-3x^2-x+2)}{(x^2-1)^{3/2}e^x}$$

$$f''(x) = \frac{x(x^3-2x^2-2x+2)}{(x^2-1)^{3/2}e^x}$$

Sicuramente ha uno 0 in $x=0 \notin Dom$

$$x^3-2x^2-2x+2 = p(x)$$

Si usa il teorema degli zeri 2 volte.

Per $x \leq 1$ faccio. $p(-1) = -1-2+2+2 = 1 > 0$

$p(-1) = -8-8+4+2 < 0$

$\Rightarrow$ per teo zeri ha un zero in $[-2,-1]$.

$x \geq 1$ $\quad p(2) = 8-8-4+2 = -2 < 0$.

$p(3) = 27-18-6+2 > 0$

$\Rightarrow$ per teo $\exists$ zeri ha un zero in $(2,3)$.

... derivata e ho e zeri

$\Rightarrow$ 2 punti di flesso

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \qquad x_1 = 3$$

$y_1 = \sqrt{8}/e^3$

$$f(x_1) \overset{x_1=3}{=} \frac{\sqrt{9-1}}{e^3} = \frac{\sqrt{8}}{e^3} \quad \text{ok}$$

$$f'(x_1) = \left.\frac{(-x^2+x+1)}{\sqrt{x^2-1}\, e^x}\right|_{x=3} = \frac{-5}{\sqrt{8}\, e^3}$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{8}}{e^3} - \frac{5}{\sqrt{8}e^3}(x-3)}$$

$\{f(x) : x < -1\} = A \qquad \inf f(A) = 0$

$\sup(A) = -\infty$

$\{f(x) : x > 2\} = B \qquad \inf f(B) = 0$

$\sup(A) = f(2) = \frac{\sqrt{3}}{e^2}$