Lezione 3 ottobre

lunedì 3 ottobre 2022 09:02

ALGEBRA LINEARE & GEO.

A scuola: GEO EUCLIDEA:

Euclide 4 - 3 sec. a.C.

Oggetti primitivi: punto
retta
piano

- 5 ASSIOMI (o POSTULATI):

① per 2 punti qualsiasi passa una e una sola retta

② si può prolungare un segmento indefinitamente oltre i due punti

③ dato 1 punto e una lunghezza, è possibile tracciare un cerchio con il punto come centro e raggio la lunghezza data.

④ Tutti gli angoli retti sono congruenti

⑤ Data una retta e un punto fuori dalla retta, esiste una unica retta parallela alla retta data e passante per il punto.

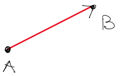
Con geom. Euclidea possiamo introdurre

VETTORI APPLICATI e VETTORI LIBERI

Def.: Un vettore applicato del piano

è un SEGMENTO ORIENTATO, con

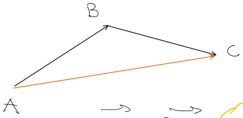
un punto iniziale A e un punto finale B



, Scriveremo $\overrightarrow{AB}$

Ci sono $\overrightarrow{AA}$: VETT. NULLI

Def. : SOMMA DI VETT. APPL.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}$$

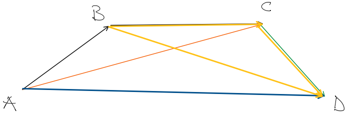
↓

"PER DEFINIZIONE È UGUALE"

OSS. :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

OSS. :
$$\underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$
$$\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}}_{=\overrightarrow{AD}} \qquad \underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}_{=\overrightarrow{AD}}$$

⟹ proprietà ASSOCIATIVA



Def.: Sia $a \in \mathbb{R}$

insieme dei numeri reali

elemento appartiene

allora $\forall$ $\overrightarrow{AB}$, possiamo definire la moltiplicazione di $\overrightarrow{AB}$ per il numero a:

= "per ogni"

$a \cdot \overrightarrow{AB}$ = il vettore che ha stessa direzione di $\overrightarrow{AB}$, verso concorde se $a > 0$ e discorde se $a < 0$, lunghezza $= |a| \cdot$ lunghezza $(\overrightarrow{AB})$

se $a = 0$, poniamo $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ vettore nullo

Vogliamo def. VETT. LIBERI:

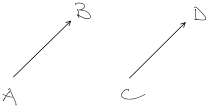
sull'insieme di vettori applicati

considera la RELAZ. DI EQUIPOLLENZA:

Def.: 2 vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono

EQUIPOLLENTI se:

- hanno stessa direzione
- hanno stesso verso
- hanno stessa lunghezza



Si verifica che equipollenza è

REL. DI EQUIVALENZA

(cioè: riflessiva, simmetrica, transitiva)

$$\vec{AB} \equiv \vec{AB}$$ proprietà riflessiva

$$\vec{AB} \equiv \vec{CD} \Rightarrow \vec{CD} \equiv \vec{AB}$$ proprietà simmetrica

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} \equiv \vec{CD} \\ \text{e } \vec{EF} \equiv \vec{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB} \equiv \vec{EF}$$ proprietà transitiva

Def. Dato $\vec{AB}$, l'insieme di tutti i vettori applicati equipollenti ad $\vec{AB}$ si chiama CLASSE DI EQUIPOLLENZA, e si indica con

$$[\vec{AB}] = \{ \vec{CD} \text{ t.c. } \vec{CD} \equiv \vec{AB} \}$$

$$= \vec{v}$$ (per i vettori liberi useremo le lettere corsive minuscole)

e si chiama VETTORE LIBERO o VETTORE GEOMETRICO

La classe $[\vec{AA}]$ contiene tutti i vettori con punto iniziale e finale coincidenti, e verrà chiamata VETTORE NULLO:

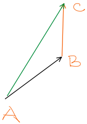
$$[\vec{AA}] =: \vec{0}$$

OSS.: Usando il 5° postulato di Euclide, si può dimostrare che $\forall$ punto P del piano, ogni vettore libero $\vec{v}$ non nullo è rappresentato da un UNICO VETTORE APPLICATO del tipo $\overrightarrow{PQ}$:

$$\vec{v} = [\overrightarrow{PQ}]$$

Questa osservazione ci permette di definire la SOMMA DI VETTORI LIBERI:

Def: $\vec{v} + \vec{u} := [\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}]$

$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{u} = [\overrightarrow{BC}]$