

Martedì 4 ottobre ore 9

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Assioma (Principio di Induzione). Sia $S \subseteq \mathbb{N}$, un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, t.c.

1) $1 \in S$

2) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

Allora $S = \mathbb{N}$.

Teorema Supponiamo che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ sia associata una proposizione P_n . Supponiamo quanto segue

1') P_1 è vera

2') $P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera}$

Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dim Sia $S = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ è vera}\}$.

1') $\Rightarrow 1 \in S$ (così S verifica la 1) dell'assioma)

2') $\Rightarrow (n \in S \Rightarrow n+1 \in S)$ così S soddisfa la 2) dell'assioma

L'assioma garantisce che $S = \mathbb{N} \Leftrightarrow$ tutte le proposizioni P_n sono vere. $\square$

Teor. (Disuguaglianze di Bernoulli). $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall a \geq -1$ si ha

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (P_n)$$

Dim.

i) Verifichiamo che P_1 è vera. P_1 si riduce a

$$(1+a)^1 = 1+a = 1+1 \cdot a, \text{ che è vera}$$

ii) Supponiamo che P_n sia vera e dimostriamo che allora anche P_{n+1} è vera

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \checkmark$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

Prendiamo la P_n

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+a+na+na \\ &= 1+a+(n+1)a \end{aligned}$$

$a \geq -1$
 $\downarrow$
 ≥ 0
 $\cdot (1+a)$