

METODI AVANZATI DI TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI

cioè

TEORIA DEI CAMPI III

GRUPPI e ALGEBRE di LIE

GRUPPO : insieme con un'operazione $\cdot : G \times G \rightarrow G$ t.c.

- 1) Identità : $\exists 1 \in G$ t.c. $1 \cdot g = g \cdot 1 = g \quad \forall g \in G$
- 2) Inverso : $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G$ t.c. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$
- 3) Associatività : $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$

Siamo interessati a GRUPPI CONTINUI, cioè gruppi che contengono elementi arbitrariamente vicini a 1

↳ detti **GRUPPI DI LIE** e hanno una struttura di **VARIETÀ DIFFERENZIABILE**

ES. $G = SO(n) = \{ \text{matrici ortogonali } n \times n \}$
 $= \{ O \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid O^T O = 1 = O O^T \}$

• è un grup col prodotto di matrici :

$$O_1 \cdot O_2 \in SO(n) \quad (O_1 O_2)^T O_1 O_2 = O_2^T \underbrace{O_1^T O_1}_{1} O_2 = 1$$

• è una varietà. Restringiamoci a $n=2$ $SO(2)$

Parametrizziamo gli elem di $SO(2)$ scegliendo

una "coordinate" :

$$O = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

↪ $SO(2)$ è diffeomorfo al CERCCHIO S^1

$$1 \leftrightarrow \varphi = 0 \quad \left| \quad \varphi = \epsilon \ll 1 \right. \\ O = 1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon^2/2 & \\ & \epsilon^2/2 \end{pmatrix}} + \dots$$

$$\text{ES. } \text{SU}(2) = \left\{ U \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \ \& \ \det U = 1 \right\}$$

Vediamo come parametrizzare tali matrici.

$$\text{Data } U \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, \quad U = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}, \quad a, c, d \in \mathbb{C}, \quad \det U = ab - cd$$

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^\dagger & d^\dagger \\ c^\dagger & b^\dagger \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow b = a^\dagger \ \& \ d = -c^\dagger$$

$$\Rightarrow \det U = |a|^2 + |c|^2$$

$$\text{Richiedere } \det U = 1 \text{ ms } (\text{Re}a)^2 + (\text{Im}a)^2 + (\text{Re}c)^2 + (\text{Im}c)^2 = 1 \quad (*)$$

cioè $\text{SU}(2)$ è una sottovarietà in \mathbb{R}^4 definita dall'equazione (*), cioè è una sfera 3d S^3 !

Consideriamo lo spazio tangente a $\mathbb{1}$ $T_{\mathbb{1}}G$.

Esso è chiamato l' **ALGEBRA DI LIE** associata a G

ALGEBRA DI LIE \mathfrak{g} : è uno SPAZIO VETTORIALE con
 un prodotto ^{BILINEARE} ANTISIMMETRICO. $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$
 che soddisfa l'id. di Jacobi:

$[\cdot, \cdot]$ su $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$ è dato da $[\cdot, \cdot]$ sui campi vett. di G

$$(X, Y \text{ campi vett.}, \text{ deriv. di Lie } \mathcal{L}_X Y = \sum_i (X^i \partial_i Y - Y^i \partial_i X) =$$

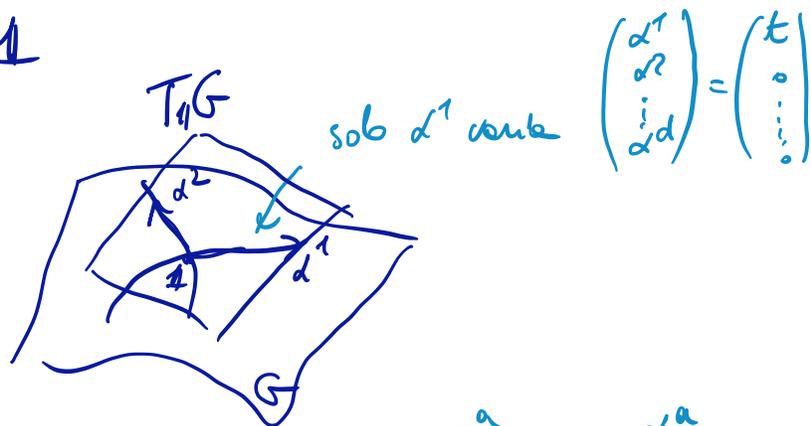
Restringiamo su pto $\mathbb{1} \rightarrow$
 allora $X, Y, [X, Y] \rightarrow$ vett. in \mathfrak{g}

$$= \mathcal{L}_Y X = [X, Y])$$

Essendo G una varietà diff., possiamo scegliere un
 set di coordinate x^a $a = 1, \dots, \dim G$

tal che $x^a = 0 \iff \mathbb{1}$

Prendiamo le linee coordinate
 i vett. tg a tali linee
 fanno una base in $T_{\mathbb{1}}G$



Prendiamo linee coord. x^1

Se $x^1 \ll 1$ allora l'elemento

$$g(x) = \mathbb{1} + i \underbrace{x^1 T^1}_{\text{vett. tg alle linee coord. } x^1}$$

è un + intorno su spazio affine (intorno di $\mathbb{1}$)



T^a sono detti: GENERATORI del gruppo di Lie G
 e formano una base per $\mathfrak{g} = T_1 G$.

$$[V, W] = [\alpha^a T^a, \beta^b T^b] = \alpha^a \beta^b [T^a, T^b]$$

$$[T^a, T^b] \in \mathfrak{g} \Rightarrow [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

COSTANTI DI STRUTTURA

del GRUPPO

Elem. infinitesimi^r (spaz. infinitesimo lungo vett. $\vec{\alpha} = \alpha^a \vec{T}^a$)

$$(*) \quad g(\alpha) = 1 + i \alpha^a T^a \quad (\text{somma su } a \text{ implicita})$$

Integrando $(*)$, otteniamo

$$g(\alpha) = e^{i \alpha^a T^a} \quad (\text{MAPPA ESPONENZIALE})$$

- Ci restringiamo a Gruppi di Lie COMPATTI
 e di DIMENSIONE FINITA

- Se un generatore T "commuta" con tutti gli altri,
 allora T genera un SOTTOGRUPPO ABELIANO $U(1)$

$$e^{iT\alpha + iT^2\alpha^2 + \dots + iT^d\alpha^d} = e^{iT\alpha} e^{i \sum_{i=2}^d \alpha^i T^i}$$

sottogruppo
dato da
elem.
 $\vec{\alpha} = (\alpha, 0, \dots, 0)$

- Quando G non contiene sottogruppi abeliani, il gruppo
 è detto SEMI-SEMPLICE

Se i generatori non possono essere divisi in due
 sottoinsiemi che commutano tra loro, allora
 è detto SEMPLICE.

- In generale l'Algebra di Lie sono delle forme

$$\mathfrak{g} = \left(\bigoplus_{i=1}^{\#ab} \langle T^i \rangle \right) \oplus \mathfrak{g}^\alpha$$

$\alpha = \text{algebra semplice}$

[Killing-Cartan]

E' possibile CLASSIFICARE tutte le alg. di Lie semplici (compatte)

A_n	\rightsquigarrow	$G = SU(n+1)$	} Classiche
B_n	\rightsquigarrow	$G = SO(2n+1)$	
C_n	\rightsquigarrow	$G = Sp(n)$	
D_n	\rightsquigarrow	$G = SO(2n)$	
E_6	F_4	} Eccezionali	} Lorentz
E_7	G_2		
E_8			
E_9			

$$SU(N) = \{ U \in M_{N \times N}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \ \& \ \det U = 1 \}$$

\downarrow
 $\mathfrak{g}?$ $U = e^{iT}$ $T = \alpha^a T^a \in \mathfrak{g}_{SU(N)}$

Che proprietà ha T affinché $U \in SU(N)$?

$$U^\dagger = e^{-iT^\dagger}$$

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \Rightarrow e^{-iT^\dagger} \cdot e^{iT} = \mathbb{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-iT^\dagger} = e^{-iT} \Rightarrow T^\dagger = T$$

nella esp. T e e^{-iT} $\bar{\cdot}$ isomorfi. hermitiana

$$1 = \det U \Rightarrow 1 = \det e^{iT} = e^{i \operatorname{tr} T} \Rightarrow \operatorname{tr} T = 0$$

T è traceless

$$\mathfrak{g}_{\text{SU}(N)} = \left\{ T \in M_{N \times N}(\mathbb{C}) \mid T^\dagger = -T \ \& \ \operatorname{tr} T = 0 \right\}$$

Es. $\text{SU}(2)$ è generata da matrici 2×2 hermitiane e traceless

\rightarrow base è data da matrici di Pauli σ^i

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \underbrace{\epsilon^{ijk}}_{f^{ijk}} \frac{\sigma^k}{2}$$

Verifichiamo che $U = e^{i \alpha^i \sigma^i}$ è unitaria

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (\alpha^i \sigma^i)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}}{(2m)!} (\alpha^i \sigma^i)^{2m} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} (\alpha^i \sigma^i)^{2k+1}$$

$$(\alpha^i \sigma^i)^2 = \|\alpha\|^2 \mathbb{1}$$

$$= \mathbb{1} \cos \|\alpha\| + i \frac{\alpha^i \sigma^i}{\|\alpha\|} \sin \|\alpha\|$$

$$U^\dagger = \mathbb{1} \cos \|\alpha\| - i \frac{\alpha^i \sigma^i}{\|\alpha\|} \sin \|\alpha\| \quad U^\dagger U = \mathbb{1}$$

RAPPRESENTAZIONI

Importanti in QFT. Spesso senza allusione:

"I campi trasformano sotto il gruppo G "

→ significa che il campo vive in una RAPPRESENTAZ.

del gruppo di Lie G ← gruppo di simmetria (globale o gauge)

Una RAPP. dell'alg. di Lie G è un insieme

di MATRICI $d_R \times d_R$ t_R^a $a=1, \dots, d = \dim G$

che soddisfanno le stesse regole di commutazione dei

generatori T^a di G , cioè

$$[t_R^a, t_R^b] = i f^{abc} t_R^c$$

↑
commutazione $t_R^a t_R^b - t_R^b t_R^a$

Le matrici t_R^a agiscono su uno SPAZIO VETT. V_R

d_R -dimensionale. d_R è detto la DIMENSIONE

della RAPP. R .

Una RAPP arbitraria può essere messa nella forma diagonale a blocchi (con una scelta opportuna delle basi di V_R),

cioè tutti i generatori sono simultaneamente block-diagonal.

$$T^1 = \left(\begin{array}{c|c} \text{1} & 0 \\ \hline 0 & \text{0} \end{array} \right)_{\substack{d_1 \\ \dots \\ d_2}}, \quad T^2 = \left(\begin{array}{c|c} \text{1} & 0 \\ \hline 0 & \text{0} \end{array} \right)_{\substack{d_1 \\ \dots \\ d_2 \\ \dots}}$$

- Una rapp. di dim k è detta RIDUCIBILE.

I blocchi corrispondono a RAPP. IRRIDUCIBILI.