

PROBLEMA DI SAINT-VENANT (1855 circa) (ALLA BASE DELLA TEORIA TECNICA DELLA TRAVE)

22/11/22

È la soluzione di un problema elastico lineare dove il dominio è costituito da un cilindro a sez. compatta allungata caricato solo sulle basi.

ADHÉMAR BARRE
CONTÉ DI SAINT-VENANT

$z=0$
 $A(z)$ x,y: ASSI PRINCIPALI (IN G); $h \ll l$

CARICO AUTOEQUILIBRATO

ELASTICO LINEARE ISOTROPICO
(LEGGE DI HOOKE GENERALIZZATA)

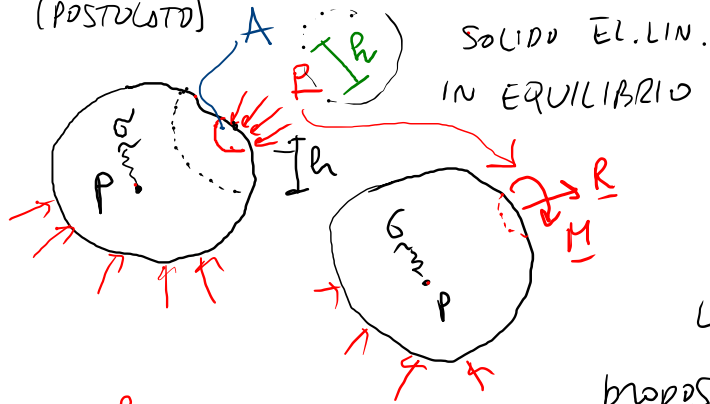
OBIETTIVO

⇒ ASSEGNATI I CARICHI SULLE BASI
DETERMINARE LO STATO TENSIONALE E
DEFORMATIVO NEI PUNTI DEL CILINDRO.

FORZE DI
VOLUME NULLE $\underline{b=0}$



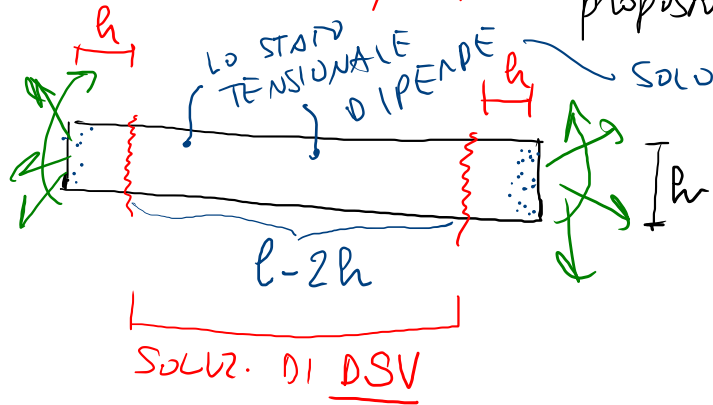
PRINCIPIO DI SAINT-VENANT (POSTULATO)



Nei punti a "sufficiente" distanza da A lo stato tensionale dipende solo da RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE dei carichi applicati ad A.

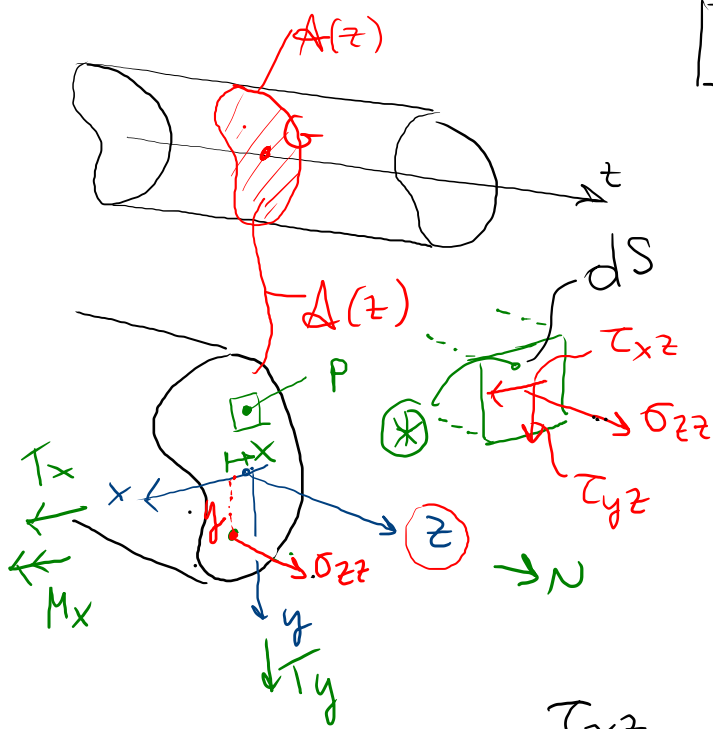
DISTANZA "SUFFICIENTE" $\geq h$

La prima "dimostrazione" del Pr. di S.V. è stata proposta nel 1937 da O. Zangaboni.



SOLO DALLE RISULTANTI DEI CARICHI SULLE BASI.

SOLUZ. DI DSV



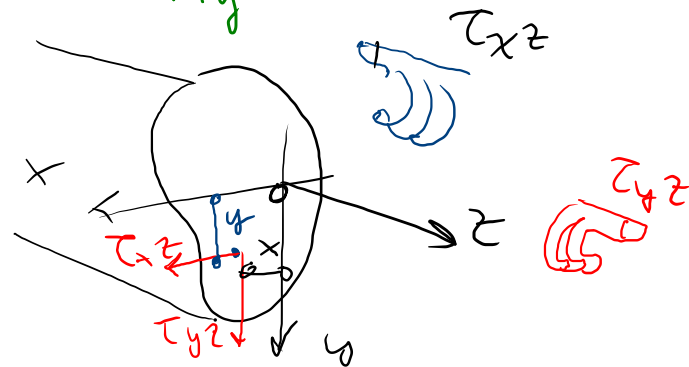
CDS: $N = \int_A \sigma_{zz} dS$; $T_x = \int_A \tau_{xz} dS$; $T_y = \int_A \tau_{yz} dS$

$$M_x = \int_A \underbrace{\sigma_{zz}}_{dF} y = \int_A \sigma_{zz} y dS$$

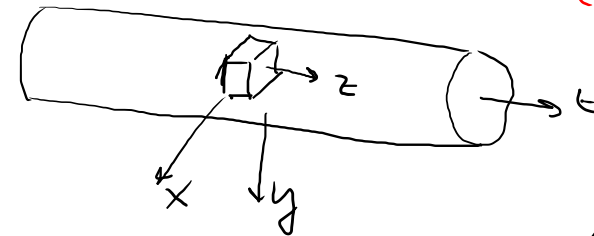
$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA$$

$$M_z = \int_A (-\tau_{xz} y + \tau_{yz} x) dS$$

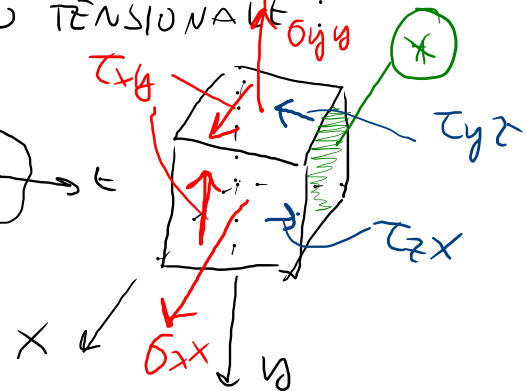
EQUIVALENZA
INTERNA
DEL CILINDRO.
VALGONO IN
OGNI SEZIONE
RETTA $A(z)$



TIPOTESI DSV SULLO STATO TENSIONALE:

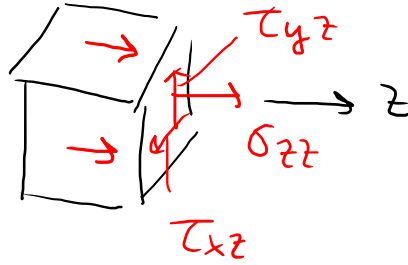


$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$$



Per l'ipotesi sullo stato tensionale di DSU $[\underline{\sigma}]$ HA LA FORMA

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

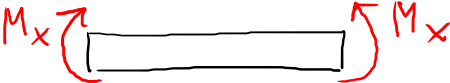


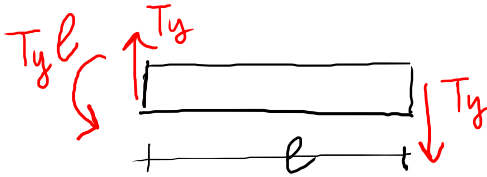
STATO TENSIONALE PIÙ GENERALE
NEL CILINDRO DI DSU

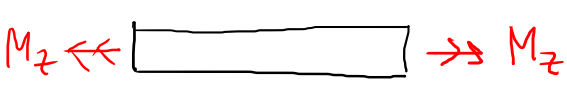
(IN REALTÀ
 $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \sigma_{yy}$ sono
"MOLTO PICCOLE" RISPETTO
ALLE TENSIONI
 $\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$)

1) 4 CASI FONDAMENTALI DEL PROBLEMA DSV

1) FORZA NORMALE  A horizontal cylinder with a dashed line through its center. At each end, there is a red arrow pointing outwards, labeled 'N'.

2) FLESSIONE RETTA (SEMPLICE)  A horizontal cylinder. At each end, there is a red curved arrow pointing upwards, labeled 'M_x'.

3) TAGLIO - FLESSIONE  A horizontal cylinder of length 'l'. At the left end, there is a red curved arrow pointing upwards labeled 'T_yl' and a red straight arrow pointing upwards labeled 'T_y'. At the right end, there is a red straight arrow pointing downwards labeled 'T_y'. Below the cylinder, a horizontal line with vertical end caps is labeled 'l'.

4) TORSIONE  A horizontal cylinder. At each end, there is a red double-headed arrow pointing outwards, labeled 'M_z'.

STUDIO OGNI PROBLEMA SINGOLARMENTE; NEL CASO DI COMBINAZIONI DI CARICO LO STATO TENSIONALE E DEFORMATIVO SONO DATI DALLA SOMMA DELLE SINGOLE SOLUZIONI PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPP. DEGLI EFFETTI (PROBL. ELASTICO LINEARE)

METODO SEMI-INVERSO : METODO DI SOLUZIONE DOVE SI

FANNO IPOTESI SU σ NEL CILINDRO, POI SI VERIFICANO TUTTE LE EQUAZ. DEL PROBLEMA.

1) FORZA NORMALE : 

 $N(z) = N$

$M_x = M_y = M_z = T_x = T_y = 0$
IN OGNI PUNTO DEL SOLIDO



IPOTESI : $\sigma_{zz} = C$ ($\forall P$ del cilindro) ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)
 $\uparrow$ cost.

CDS : $N(z) = \int_A \sigma_{zz} dS = C \int_A dS = C A = N$; $C = \frac{N}{A}$

$\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$

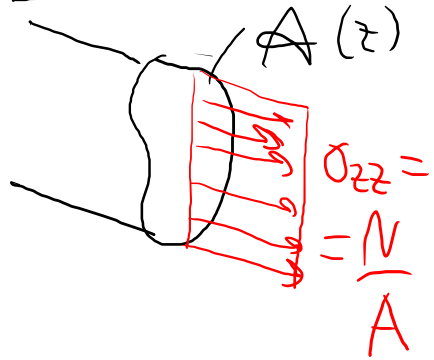
$0 = M_x(z) = \int_A \sigma_{zz} y dS = C \int_A y dS = 0$ (OK)

$M_y = \dots = 0$

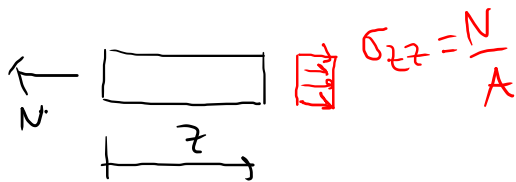
S_x : MOM. STATICO

RISPETTO ALL'ASSE $x = 0$

BARICENTRICO

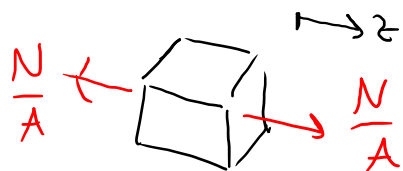


TUTTE LE CDS SONO SODDISFATTE DA $\sigma_{zz} = \frac{N}{A}$
EQUAZ.



IN OGNI PUNTO DEL CILINDRO C'E' UNO STATO MONOASSIALE DI TRAZIONE

CUBETTO NEL PUNTO P GENERICO



LEG. COSTITUTIVO
DEFORMAZIONI

$$(\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{N}{EA}$$

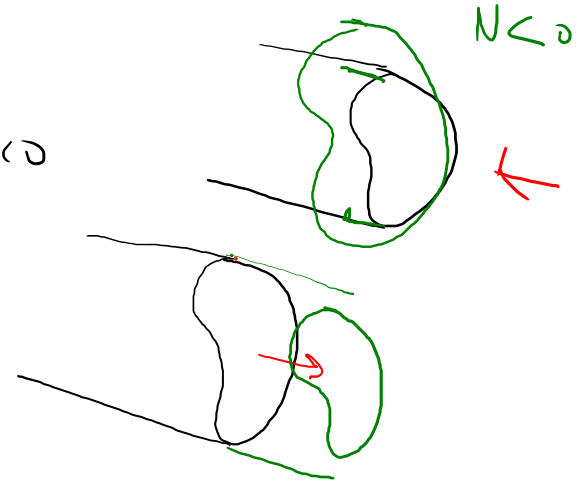
$$N > 0; \epsilon_{zz} > 0$$

$$N < 0 \\ \epsilon_{zz} < 0$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} = -\nu \frac{N}{EA} ; N > 0 ; \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} < 0$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} > 0 \quad N < 0$$

RESTRINGIMENTO TRASVERSALE (OMOTETTICO)



EQ. 01 EQUILIBRIO PUNTUALE

$$(\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}})$$

$$\begin{aligned} \cancel{\tau_{xz,z}} &= 0 \\ \cancel{\tau_{yz,z}} &= 0 \end{aligned}$$

DEVE VALERE
NEL CILINDRO

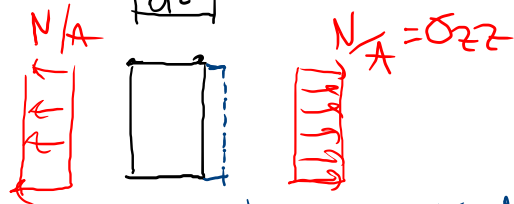
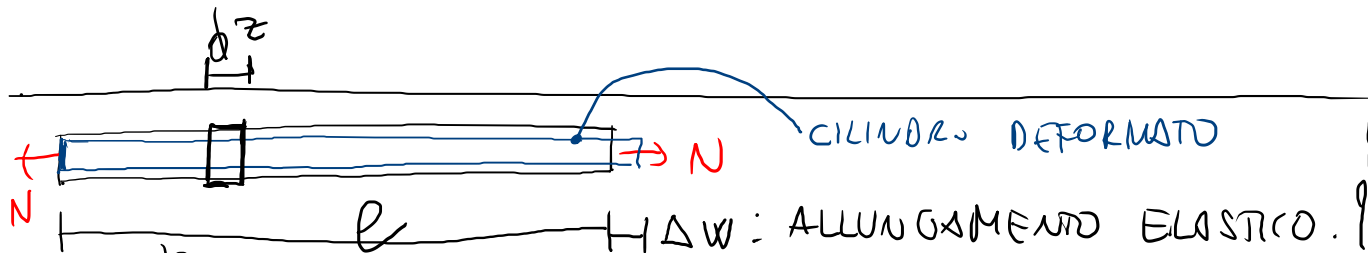
1) FORZA NORMALE

$$\sigma_{zz} = C = \frac{N}{A} \quad ; \quad \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$$

$$\cancel{\tau_{xz,x}} + \cancel{\tau_{yz,y}} + \boxed{\sigma_{zz,z} = 0}$$

È OK PERCHÉ
 σ_{zz} È COSTANTE

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N}{A} \right) = 0$$



Δw (ALLUNGAM. DEL CONCIO)

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz}$$

CONGRUENZA INTERNA

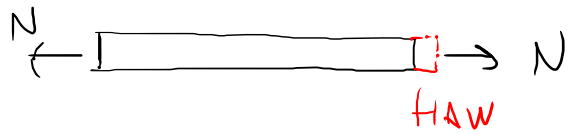
$$\epsilon_{zz} = \frac{N}{EA}$$

LEG-COSTRUTTIVO

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}}$$

$$\boxed{\Delta w = \int_0^l dw = \int_0^l \frac{N}{EA} dz = \frac{N}{EA} \int_0^l dz = \frac{Nl}{EA}}$$

ALLUNGAMENTO DEL CILINDRO.



$$\Delta w = N \left(\frac{l}{EA} \right) \frac{1}{K}$$

$$\Delta w = \frac{N}{K}$$

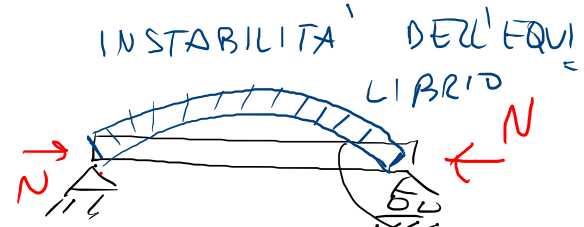
$$K = \frac{EA}{l}$$

ANALOGIA TRA
PROBL. 1) FORZA NORMALE
E MOLLA ELASTICA
LINEARE.

LA SOLUZ. ELASTICA LINEARE DEL PROBL. 1) FORZA NORMALE VALE
ANCHE SE $N < 0$ ($N \rightarrow \text{bar} \leftarrow N$)

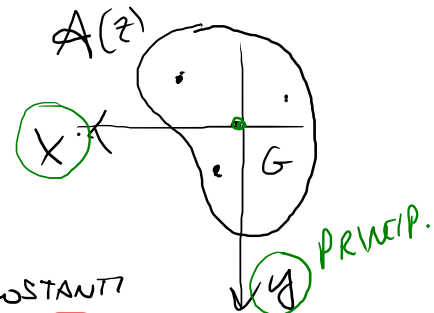
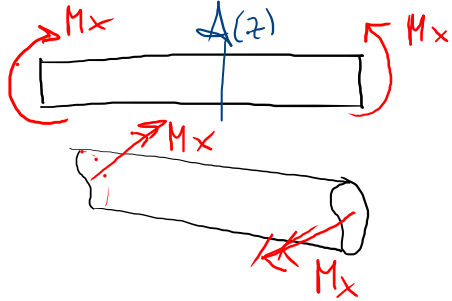
ATTENZIONE AL FATTO CHE IN AMBITO STRUTTURALE :

LA SOLUZ. DI DSV VALE SOLO PER $N < 0$



"MODERATI"
CORICO DI PUNTA
INSTABILITA' EULERIANA

2) FLESSIONE RETTA (o SEMPLICE)



$$N(z) = T_x(z) = T_y = \dot{M}_y = \dot{M}_z = 0$$

costanti

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 ; \quad \sigma_{zz} = ax + by$$

IN OGNI PUNTO DEL CILINDRO

IPOTESI SULLO STATO TENSIONALE

VERIFICO LE EQ. [CDS]:

$$\text{VISTO CHE } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow M_z = T_x = T_y = 0$$

$$N = \left| \int_A \sigma_{zz} dS = 0 \right| \Rightarrow \int_A (ax + by) dS = a \int_A x dS + b \int_A y dS = 0 \quad \text{OK}$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dS \Rightarrow M_x = a \int_A xy dS + b \int_A y^2 dS \Rightarrow M_x = b J_x \Rightarrow b = \frac{M_x}{J_x}$$

$$M_y = 0 = - \int_A \sigma_{zz} x dS \Rightarrow 0 = a \int_A x^2 dS + b \int_A xy dS \Rightarrow 0 = a J_y \Rightarrow a = 0$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y$$

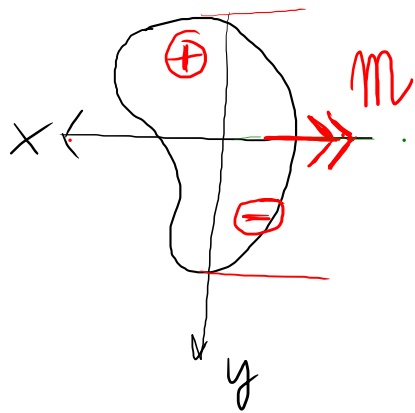
FORMULA DI
NAVIER

$J_x > 0$

$$\sigma_{zz} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 0$$

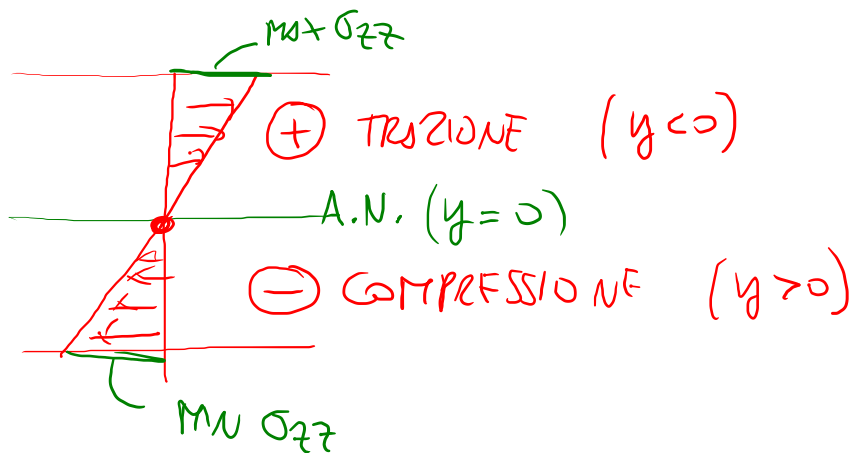
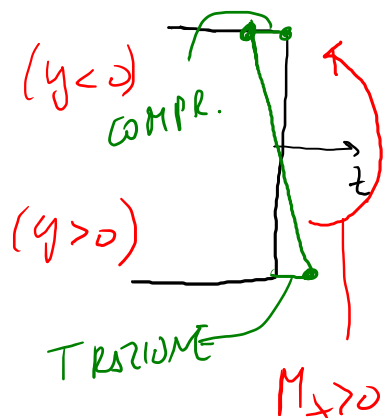
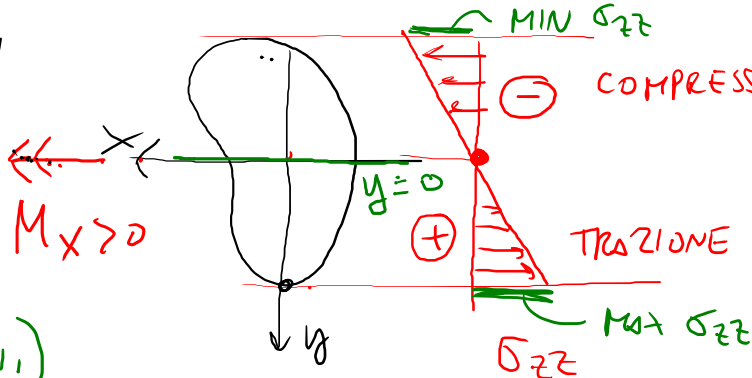
ASSE
NEUTRO (A.N.)



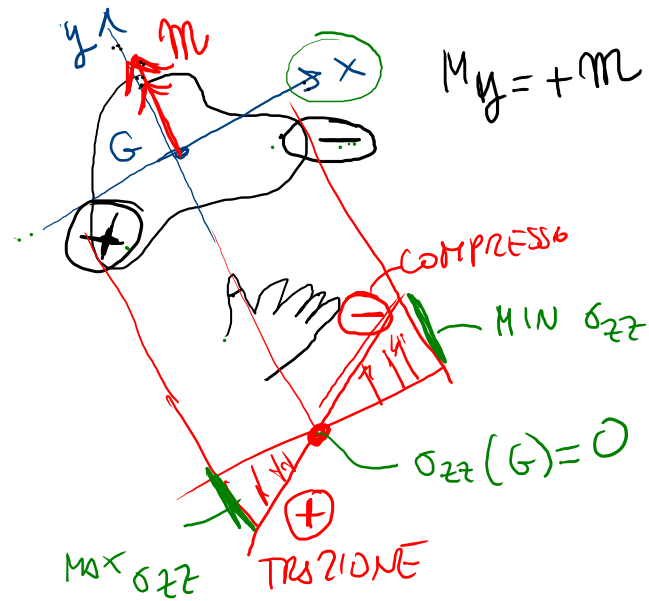
SI RICONDUCE
ALLA FORMULA
DI NAVIER

CON $M_x = -M$

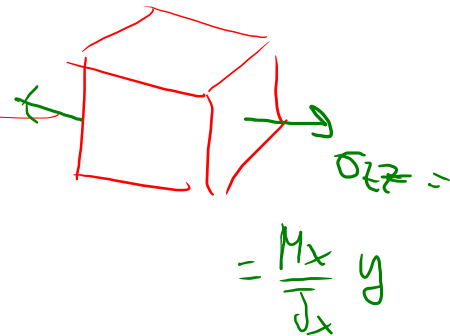
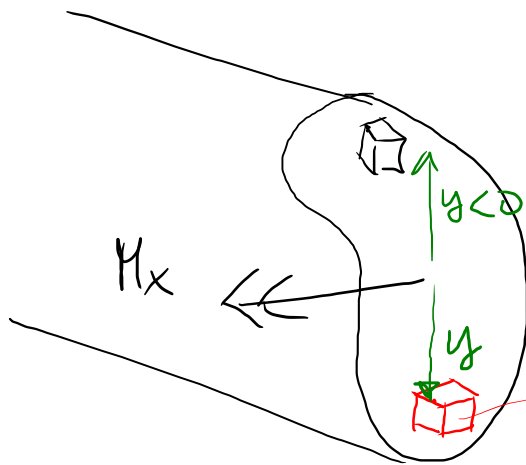
$$\sigma_{zz} = \frac{-M}{J_x} y$$



COSA SUCCEDE ALLA FORMULA DI NAVIER QUANDO



$$\sigma_{zz} = - \frac{M_y}{J_y} x$$



NELLA FLESSIONE RETTA OGNI
PUNTO DEL CILINDRO È SOLLECITATO
DA UNO STATO TENSIONALE MONOASSIALE