Lezione 4 ottobre

martedì 4 ottobre 2022 14:10

$\vec{v} = [\vec{AB}]$ vettore libero

Def.: $[\vec{AA}] = \vec{0}$ vettore NULLO

$= [\vec{BB}]$

Ieri abbiamo visto la nozione di SOMMA di vettori liberi:

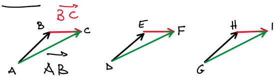
$\vec{v} + \vec{w}$

se $\vec{v} = [\vec{AB}]$, per $\vec{w}$ possiamo scegliere un rappresentante con punto iniziale B:

$\vec{w} = [\vec{BC}]$; allora poniamo

$\vec{v} + \vec{w} := [\vec{AB} + \vec{BC}] = [\vec{AC}]$

OSS. :



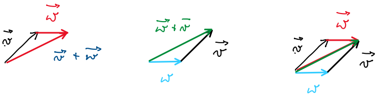
$\vec{v} = [\vec{AB}] = [\vec{DE}] = [\vec{GH}]$, $\vec{w} = [\vec{BC}] = [\vec{EF}] = [\vec{HI}]$

Si può dimostrare che la + non dipende dalla scelta del rappres. per $\vec{v}$.

OSS. : Abbiamo che + tra vettori liberi è COMMUTATIVA:

(V2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Dimostraz. grafica:



V4 Prop. di $\vec{o}$: $\vec{v} + \vec{o} = \vec{v} = \vec{o} + \vec{v}$

è l'ELEM. NEUTRO per la SOMMA

V1 La somma verifica anche la proprietà ASSOCIATIVA (è conseguenza della associatività per vettori applicati)

V3 Infine: Tra i vettori liberi,

abbiamo che $\underbrace{\forall}_{\text{"per ogni"}} \vec{v}, \underbrace{\exists}_{\text{"esiste"}}$ un vettore,

chiamato OPPOSTO DI $\vec{v}$: indic.

$-\vec{v}$ t.c.

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{o} = (-\vec{v}) + \vec{v}$$

più precis., se $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$

$$-\vec{v} = [\overrightarrow{BA}]$$

* * *

Inoltre: Abbiamo visto l'operazione di moltiplicazione di un vettore per un numero, ovvero per uno SCALARE : $\forall\ a \in \mathbb{R}$, è definito $a \cdot \overrightarrow{AB}$ (vedere lezione di ieri)

È possibile dare una definizione analoga per vettori liberi:

Def: $\vec{v}$, sia $a \in \mathbb{R}$,
se $\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$, poniamo
$$a \cdot \vec{v} := [\underbrace{a \cdot \overrightarrow{AB}}]$$

è possib. verificare che questa def. non dipende dalla scelta del rappres.

PROPRIETÀ: $\forall\ \vec{v}, \vec{w}$, e $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$
si ha:

V8
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

V6 • $(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$

V7 $\underbrace{(a\cdot b)}_{\text{prodotto in } \mathbb{R}} \overset{\text{prodotto scalare × vettore}}{\cdot} \vec{v} = a\cdot(b\cdot\vec{v})$

V5 $a\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = a\cdot\vec{v} + a\cdot\vec{w}$

Def. : Sia V un insieme, $V \neq \emptyset$.

V si dice SPAZIO VETTORIALE REALE

se in V sono definite 2 operazioni, di somma $+$ e prodotto per uno scalare reale $\cdot$, che verificano i seguenti assiomi:

V1 PROPR. ASSOCIATIVA DI $+$

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

V2 PROPR. COMMUTATIVA DI $+$:

$$u+v = v+u$$

V3 ESISTENZA DEL VETTORE NULLO:

$\exists\ 0 \in V$ tale che

$$0+v = v+0 = v$$

V4 ESISTENZA DEL VETTORE OPPOSTO:

$\forall\ v \in V$, $\exists$ vettore $-v \in V$ tale che

$$v+(-v) = (-v)+v = 0$$

V5 DISTRIBUTIVITÀ DI $\cdot$ RISPETTO A $+$:

$$a\cdot(v+u) = a\cdot v + a\cdot u$$

(V6) DISTRIBUT. DI $\cdot$ RISPETTO ALLA SOMMA in $\mathbb{R}$:

$$(a \underset{\substack{\downarrow \\ \text{somma in } \mathbb{R}}}{+_{\mathbb{R}}} b)\cdot v = a\cdot v \underset{\substack{\downarrow \\ \text{somma in } V}}{+_{V}} b\cdot v$$

(V7) "ASSOCIATIVITÀ" DI $\cdot$:

$$\underbrace{(ab)}_{\text{prodotto di 2 numeri reali}} \overset{\text{moltiplicazione scalare per vettore}}{\cdot} v = a\cdot(b\cdot v)$$

(V8) $\forall\, v\in V$, vale

$$1\cdot v = v$$

Infine, gli elementi di V si dicono VETTORI.

Esempi:

① L'insieme $\mathcal{V}^2$ dei vettori liberi piani è SV

② Cons. $V=\mathbb{R}$ con le usuali operazioni $+$ e $\cdot$.
verifica (V1), …, (V8).

③ Cons. $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ = coppie ordinate di numeri reali

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^2 \quad \text{PIANO REALE}$$

Ci sono $+$ e $\cdot$ così definite:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$k\in\mathbb{R},\quad k\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} k\cdot a \\ k\cdot b \end{pmatrix}$$

verifica ⓥ1, ..., ⓥ8

NEUTRO : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, opposto di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

③ $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = terne ordinate di numeri reali

$= \mathbb{R}^3$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$

Anche in questo caso definiamo una somma e un prodotto per scalari:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$

$$k \in \mathbb{R}, \quad k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \\ k \cdot c \end{pmatrix}$$

Verifichiamo ⓥ1, ..., ⓥ8

NEUTRO $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, opp. di $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ anche $\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale reale.

④ $V = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} =: \mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N}$ SPAZIO REALE n-DIM.

Def. + e · :

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} k a_1 \\ k a_2 \\ \vdots \\ k a_n \end{pmatrix}$$

verificano ⓋV1, …, V8Ⓥ

verificano (V1), …, (V8)

NEUTRO : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

⑤ $\mathbb{R}[x]$ SPAZIO DEI POLINOMI REALI NELLA INCOGNITA x

es.: $3x^2 - 2x + 8$

$17x^8 + 13$

In generale gli elementi di $\mathbb{R}[x]$ si possono scrivere nella forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k$$

dove $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$

e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$

Anche in questo caso sono definite due oprazioni, di somma e di prodotto per uno scalare:

sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$

$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m$

se $k \geq m$, $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_k x^k$

se $k < m$, simile

per $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot p(x) = c \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k) = c \cdot a_0 + c \cdot a_1 x + c \cdot a_2 x^2 + \dots + c \cdot a_k x^k$

Risultano nuovamente verificati gli assiomi ⓥ1, …, ⓥ8

Elemento neutro : polinomio nullo

$$p(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}[x]$ è uno SV reale

VEDREMO: $\mathbb{R}[x]$ ha dim. INFINITA

⑥ $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = funzioni : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$= \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

Ci sono $+$, $\cdot$: $f+g$ è definita PUNTUALMENTE:

$$\underbrace{(f+g)}_{\text{somma di funzioni}}(a) := f(a) \underbrace{+}_{\text{somma di numeri reali}} g(a)$$

anche $c \cdot f$ è definita PUNTUALMENTE:

$$(c \underbrace{\cdot}_{\text{moltiplicazione scalare per funzione}} f)(a) := c \overset{\text{moltiplicazione tra 2 scalari}}{\cdot} f(a)$$

le due operazioni verificano ⓥ1, …, ⓥ8

⑦ Analogamente, anche gli insiemi

$\mathcal{F}((a,b), \mathbb{R})$ = funzioni definite su un intervallo (a,b) a valori in $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = funzioni CONTINUE da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}^0((a,b), \mathbb{R})$ = funzioni CONTINUE da (a,b) in $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = funzioni DERIVABILI da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}^1((a,b), \mathbb{R})$ = — " — da (a,b) in $\mathbb{R}$

$\mathcal{L}^1((a,b), \mathbb{R})$ = funzioni INTEGRABILI da (a,b) in $\mathbb{R}$

∼ · ∼ · ∼

Abbiamo visto: SV reali

Voglio generalizzare l'insieme dei NUMERI oss. che $\mathbb{R}$ ha 2 operaz. $+$ e $\cdot$

che verificano:

(K1) commut. di $+$ e $\cdot$

(K2) assoc. di $+$ e $\cdot$

(K3) esistenza di neutro 0 per $+$
e neutro 1 per $\cdot$

(K4) esistenza di opposto e
di inverso per ogni elemento $\neq 0$

(K5) distributività di $\cdot$ rispetto a $+$

Def: Sia K un insieme non vuoto con due operazioni
$+$ e $\cdot$ che verificano (K1), ..., (K5).

Allora K si chiama CAMPO.

Esempio: $K = \{\ast\}$ insieme con un solo elemento

Vediamo se possiamo definire 2 operazioni:

$+ : \quad \ast + \ast = \ast$

l'unico possibile risultato è $\ast$, perché non ci sono altri elementi

$\cdot \quad \ast \cdot \ast = \ast$

verifica (K1), ..., (K5)

$$\ast \cdot (\ast + \ast) = \ast \cdot \ast + \ast \cdot \ast$$
$$= \ast$$

CAMPO BANALE.

ESERCIZIO per la sera:

trovare un campo con 2 elementi