

**CORSO DI ALEG**  
**PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI**  
**6 OTTOBRE 2022**  
**PROF. VALENTINA BEORCHIA**

(1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ . Si dimostrino, usando gli assiomi di spazio vettoriale  $V1, V2, \dots, V8$ , le seguenti proprietà:

(a) per ogni vettore  $\mathbf{v} \in V$  si ha

$$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

dove  $0 \in \mathbb{K}$  indica l'elemento neutro rispetto alla somma in  $\mathbb{K}$ , e  $\mathbf{0} \in V$  indica il vettore nullo, cioè l'elemento neutro rispetto alla somma in  $V$ .

(b) per ogni  $t \in \mathbb{K}$  si ha

$$t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(c) In  $V$  esiste un unico vettore nullo.

(d) Ogni vettore  $\mathbf{v}$  ha un unico opposto.

(e) Per ogni  $\mathbf{v} \in V$  si ha

$$(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v},$$

dove  $1 \in \mathbb{K}$  denota l'elemento neutro per il prodotto in  $\mathbb{K}$ ,  $-1$  il suo opposto e  $-\mathbf{v}$  l'opposto di  $\mathbf{v}$ .

(2) Si scrivano la tabella per la moltiplicazione in  $\mathbb{Z}_{12}$ , e si individuino gli elementi non invertibili di  $\mathbb{Z}_{12}$ .

(3) Si dica quanti elementi ha lo spazio vettoriale  $\mathbb{Z}_3^n$ .